Analysis III — Woche 6

Prof. Dr. M. Růžička, Dr. M. Křepela — Abgabe bis 26.11.2018, 10 Uhr

Aufgabe 21 — **3 Punkte**

Sei $E \subset \mathbb{R}^n$ offen. Zeigen Sie, dass gilt

$$E = \left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} Q_k \right) \cup N,$$

wobei Q_k paarweise disjunkte, offene, beschränkte Würfel sind und N eine λ^n-Nullmenge ist.

Aufgabe 22 — **7 Punkte**

Sei $-\infty < a < b < \infty$ und $f \in C^1([a,b])$.

(a) Sei $E := \{x \in (a,b) \mid f'(x) = 0\}$. Zeigen Sie, dass $f(E)$ eine Lebesgue-Nullmenge ist.

Tipp: Sie können Lemma 6.16 aus der Vorlesung benutzen.

(b) Sei $G := \{x \in [a,b] \mid f(x) = 0\}$ und $H := \{x \in [a,b] \mid f(x) = 0, f'(x) = 0\}$. Zeigen Sie, dass $G \setminus H$ eine Lebesgue-Nullmenge ist.

Tipp: Zeigen Sie, dass $A_n := \left\{x \in (a,b) \,\middle|\, f(x) = 0, |f'(x)| \geq \frac{1}{n}\right\}$ nur endlich viele Elemente enthält.

Aufgabe 23 — **10 Punkte**

(a) Sei T ein offenes Dreieck in $\mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass $\lambda^2(T) = \frac{sh}{2}$, wobei s die Länge einer beliebig gewählten Seite ist und h die Höhe des Dreiecks bezüglich dieser Seite ist.

(b) Sei $A \subset \mathbb{R}^2$ konvex, $\operatorname{int}(A) \neq \emptyset$ und $\lambda^n(A) < \infty$. Zeigen Sie, dass A beschränkt ist.

Tipp: Setzen Sie voraus, dass A unbeschränkt ist und finden Sie eine Folge von in A enthaltenen Dreiecken mit wachsendem Lebesguemaß.

(c) Finden Sie eine unbeschränkte offene Menge $G \subset \mathbb{R}^n$ mit $\lambda^n(G) < \infty$.