Analysis III — Woche 7

Prof. Dr. M. Růžička, Dr. M. Křepela — Abgabe bis 3.12.2018, 10 Uhr

Aufgabe 24 — **4 Punkte**

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Seien f, g, f_n, $n \in \mathbb{N}$, μ-messbar und μ-fast überall endlich mit $f_n \to f$ und $f_n \to g$ im Maß.

(a) Zeigen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $\lambda \geq 0$ gilt

$$\{|f-g| > \lambda\} \subset \{|f_n - g| > \lambda/2\} \cup \{|f_n - f| > \lambda/2\} \cup N,$$

wobei $N \in \mathcal{A}$ eine μ-Nullmenge ist.

(b) Zeigen Sie, dass gilt $f = g$ μ-fast überall.

Aufgabe 25 — **4 Punkte**

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und seien $f_n, f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ so, dass $f_n \to f$ in $\mathcal{L}^1(\mu)$, d.h. $\int_X |f_n - f| \, d\mu \to 0$. Zeigen Sie, dass $f_n \to f$ im Maß gilt. Folgern Sie daraus, dass es eine Teilfolge gibt, die fast überall gegen f konvergiert.

Definition. Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine Menge. Für $\alpha \geq 0$ definieren wir

$$\alpha A := \{\alpha x \,\big|\, x \in A\}.$$

Aufgabe 26 — **1 Punkt**

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine λ^n-messbare Menge und $\alpha \geq 0$. Zeigen sie, dass gilt

$$\lambda^n(\alpha M) = \alpha^n \lambda^n(M).$$

Aufgabe 27 — **11 Punkte**

Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ konvex und beschränkt, mit $0 \in \operatorname{int}(A)$. Zeigen Sie das Folgende:

(a) $\operatorname{int}(A) \subset \bigcup_{k\geq 2}((1 - \frac{1}{k})\overline{A})$.

(b) Es existiert ein $\delta > 0$ so, dass für alle $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, und alle $x \in \left(1 - \frac{1}{k}\right) A$ gilt $B(x, \frac{\delta}{k}) \subset \operatorname{int}(A)$.

(c) $\operatorname{int}(A) \supset \bigcup_{k\geq 2}((1 - \frac{1}{k})\overline{A})$.
Tipp: Approximieren Sie $x \in \left(1 - \frac{1}{k}\right) \overline{A}$ durch Punkte aus $\left(1 - \frac{1}{k}\right) A$ und nutzen Sie (b).

(d) $\lambda^n(\overline{A}) = \lambda^n(\operatorname{int}(A))$.

(e) ∂A is λ^n-messbar mit $\lambda^n(\partial A) = 0$.

(f) A ist λ^n-messbar.

(g) Finden Sie eine λ^n-Nullmenge $B \subset \mathbb{R}^n$ mit $\lambda^n(\partial B) = \infty$.