Analysis III — Woche 8

Prof. Dr. M. Růžička, Dr. M. Křepela — Abgabe bis 10.12.2018, 10 Uhr

Aufgabe 28 — **7 Punkte**

Sei $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex.

(a) Sei $x \in \mathbb{R}$. Man bezeichne mit $\varphi'_-(x)$ und $\varphi'_+(x)$ die linke bzw. rechte Ableitung von φ im Punkt x. Zeigen Sie, dass diese beiden einseitigen Ableitungen existieren und es gilt

$$-\infty < \varphi'_-(x) \le \varphi'_+(x) < \infty.$$

(b) Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass gilt

$$\varphi(x) + (y - x)\varphi'_+(x) \le \varphi(y).$$

(c) Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum mit $\mu(A) = 1$ und sei $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Beweisen Sie die *Jensen-Ungleichung*

$$\varphi\left(\int_X f \,\mathrm{d}\mu\right) \le \int_X \varphi \circ f \,\mathrm{d}\mu.$$

Tipp: Nutzen Sie (b) mit der Wahl $x = \int_X f \,\mathrm{d}\mu$ und $y = f(z)$, $z \in X$.

Aufgabe 29 — **4 Punkte**

Seien $-\infty \le A < B \le \infty$ und sei $f : (A, B) \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die eine Regelfunktion auf jedem Intervall $[a, b] \subset (A, B)$ ist. Zeigen Sie, dass f auf (A, B) genau dann Lebesgue-integrierbar ist, wenn das uneigentliche Regelintegral $\int_A^B |f(x)| \,\mathrm{d}x$ existiert und endlich ist, und dass in diesem Fall das Lebesgue- und Regelintegral übereinstimmen.

Aufgabe 30 — **9 Punkte**

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum mit $\mu(X) > 0$.

(a) Zeigen Sie, dass für jede μ-messbare Funktion f gilt:

$$\sup_{p \in [1,\infty)} \|f\|_p < \infty \implies \|f\|_\infty < \infty.$$

(b) Sei $\mu(X) < \infty$. Zeigen Sie, dass für jede μ-messbare Funktion f gilt:

$$\sup_{p \in [1,\infty)} \|f\|_p < \infty \impliedby \|f\|_\infty < \infty.$$

(c) Sei $\mu(X) < \infty$. Sei $f \in L^\infty(\mu)$. Zeigen Sie, dass $\|f\|_p \to \|f\|_\infty$ für $p \to \infty$ gilt.
Tipp: Für jedes $\lambda < \|f\|_\infty$ gilt $\|f\|_p \ge \|\lambda \chi_{\{|f| > \lambda\}}\|_p$.

(d) Zeigen Sie, dass weder (b) noch (c) gelten, wenn $\mu(X) = \infty$.

(e) Betrachten Sie das Intervall $(0, 1)$ mit dem Lebesguemaß. Sei $f(x) := -\log x$ für $x \in (0, 1)$. Zeigen Sie, dass $f \in L^p(0, 1)$ für alle $p \in [1, \infty)$, aber $f \notin L^\infty(0, 1)$.
Tipp: Sie können zum Beispiel nutzen, dass $|f| \le \sum_{n \in \mathbb{N}} n (\log 2) \chi_{(2^{-n}, 2^{1-n})}$ gilt, um $\|f\|_p$ abzuschätzen.