Analysis III — Woche 9

Prof. Dr. M. Růžička, Dr. M. Křepela — Abgabe bis 17.12.2018, 10 Uhr

Aufgabe 31 — **5 Punkte**

Sei $1 \leq p < \infty$ und $f_n, f \in L^p$. Weiterhin konvergiere $f_n \to f$ fast überall und $\|f_n\|_{L^p} \to \|f\|_{L^p}$. Zeigen Sie, dass $f_n \to f$ in L^p gilt.

Tipp: Wenden Sie auf $\varphi_n := 2^{p-1}(|f_n|^p + |f|^p) - |f_n - f|^p$ das Lemma von Fatou an.

Aufgabe 32 — **7 Punkte**

(a) Zeigen Sie, dass für alle $y \geq 0$ und alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ gilt

$$(1+y)^n \geq \frac{(ny)^2}{4}.$$

(b) Berechnen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n x^{\frac{1}{n}}}.$$

Tipp: Dank (a) kann man eine auf dem Intervall $(1, \infty)$ integrierbare Majorante finden. Um eine auf $(0, 1]$ integrierbare Majorante zu finden, zeigen Sie zuerst, dass $x^{\frac{1}{n}} \geq x^{\frac{1}{2}}$ für $x \in (0, 1]$ und $n \geq 2$ gilt.

Definition. Seien $(X, \|\cdot\|_X)$ $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normierte lineare Räume. Wir sagen, dass X *in Y (stetig) eingebettet ist*, und schreiben $X \hookrightarrow Y$, falls $X \subset Y$ (im Sinne von Mengen) und eine Konstante $C \in (0, \infty)$ existiert so, dass für alle $x \in X$ gilt

$$\|x\|_Y \leq C\|x\|_X.$$

Definition. Sei $1 \leq p \leq \infty$. Man definiert ℓ^p als den linearen Raum aller reellen Folgen $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ so, dass gilt

$$\begin{aligned} \|a\|_p &:= \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^p < \infty\right)^{\frac{1}{p}}, && \text{falls } p < \infty, \\ \|a\|_\infty &:= \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n| < \infty, && \text{falls } p = \infty. \end{aligned}$$

Aufgabe 33 — **8 Punkte**

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum.

(a) Sei $\mu(X) < \infty$. Zeigen Sie, dass für $1 \leq p \leq q \leq \infty$ gilt $L^q(\mu) \hookrightarrow L^p(\mu)$.
Tipp: Hölder-Ungleichung.

(b) Finden Sie ein Beispiel eines Maßraumes $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mit $\mu(X) = \infty$ so, dass für alle $p, q \in [1, \infty]$ mit $p < q$ der Raum $L^q(\mu)$ nicht in $L^p(\mu)$ eingebetttet ist.

(c) Sei $1 \leq p \leq \infty$. Finden Sie einen Maßraum $(X, \mathcal{A}, \mu)$, damit $\ell^p = L^p(\mu)$ gelte. (Das zeigt, dass $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ wirklich ein normierter linearer Raum ist.)

(d) Seien $1 \leq p \leq q \leq \infty$. Zeigen Sie, dass gilt $\ell^p \hookrightarrow \ell^q$ (bezüglich der Normen $\|\cdot\|_p$).
Tipp: Verwenden Sie, dass $\sum_{n=1}^N |a_n|^r \leq \left(\sum_{n=1}^N |a_n|\right)^r$ für alle $r \geq 1$ und $N \in \mathbb{N}$ gilt.