s'Rechebläddle

Prof. Dr. M. Růžička, Dr. M. Křepela · **Woche 1** · Abgabe bis 28.10.2019, 10 Uhr

Aufgabe 1 **3 Punkte**

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ offen. Für hinreichend oft differenzierbare Funktionen $u, v : \Omega \to \mathbb{R}^3$ und $w : \Omega \to \mathbb{R}$ definieren wir

$$\operatorname{div} u := \sum_{j=1}^{3} \partial_{x_j} u_j, \qquad \operatorname{rot} u := (\partial_{x_2} u_3 - \partial_{x_3} u_2,\ \partial_{x_3} u_1 - \partial_{x_1} u_3,\ \partial_{x_1} u_2 - \partial_{x_2} u_1),$$

$$\nabla w := (\partial_{x_1} w, \partial_{x_2} w, \partial_{x_3} w), \qquad \Delta u := (\Delta u_1, \Delta u_2, \Delta u_3).$$

Zeigen Sie das Folgende:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \nabla w &= \Delta w, & \operatorname{div}(u \times v) &= v \cdot \operatorname{rot} u - u \cdot \operatorname{rot} v, \\ \operatorname{rot} \nabla w &= 0, & \operatorname{rot} \operatorname{rot} u &= \nabla \operatorname{div} u - \Delta u, \\ \operatorname{div} \operatorname{rot} u &= 0. \end{aligned}$$

Aufgabe 2 **7 Punkte**

Gegeben sei die Funktion $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ x \mapsto (x_1,\ x_1+x_2,\ x_1+x_2+x_3)^\top$ und das Kugelsegment $G := \{x \in \mathbb{R}^3 \,\big|\, |x| < 2,\ x_1 > 1\}$. Mit $\nu(x)$ bezeichnen wir die äußere Normale an G im Punkt $x \in \partial G$. Berechnen Sie das Oberflächenintegral

$$\int_{\partial G} u(x) \cdot \nu(x) \,\mathrm{d}o(x)$$

(a) gemäß der Definition des Oberflächenintegrals,

(b) mit Hilfe des gaußschen Integralsatzes.

Aufgabe 3 **5 Punkte**

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Normalgebiet und sei $f \in C^2(\overline{\Omega})$ eine harmonische Funktion auf Ω, d.h. $-\Delta f = 0$ auf Ω. Es gelte außerdem $f\big|_{\partial\Omega} = 0$. Zeigen Sie mit Hilfe der greenschen Formeln, dass dann schon

$$f = 0 \qquad \text{auf } \Omega$$

gilt.

Aufgabe 4 **5 Punkte**

Sei $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ und sei $v(r, \varphi) = u(x(r, \varphi), y(r, \varphi))$ mit $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$.

(a) Zeigen Sie, dass gilt

$$\partial_r^2 v + \frac{1}{r}\partial_r v + \frac{1}{r^2}\partial_\varphi^2 v \ = \ \Delta u.$$

(b) Sei $v(r, \varphi) = r\sin\varphi$. Zeigen Sie, dass u eine Lösung des Problems

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 && \text{in } B_1(0) \setminus \{0\}, \\ u(x(1, \varphi), y(1, \varphi)) &= \sin\varphi && \text{für } \varphi \in [0, 2\pi] \end{aligned}$$

ist, wobei $B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 1\}$.

Anwesenheitsaufgaben zu Blatt 1

Anwesenheitsaufgabe 1
Sei $1 < p < \infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand und $f \in C(\overline{\Omega})$. Für $u \in C^2(\overline{\Omega})$ definieren wir

$$\Phi(u) := \frac{1}{p} \int_\Omega |(\nabla u)(x)|^p \,\mathrm{d}x - \int_\Omega f(x)\, u(x) \,\mathrm{d}x.$$

Berechnen Sie die erste Variation $\delta\Phi(u,h)$ für glatte Funktionen h mit $h = 0$ auf $\partial\Omega$ und bestimmen Sie die zugehörige Differentialgleichung für den Minimierer von Φ.

Anwesenheitsaufgabe 2
Gegeben ist das Kugelsegment $G := \{x \in \mathbb{R}^3 \,\big|\, |x| < 2,\ x_1 > 1\}$. Berechnen Sie den Flächeninhalt von ∂G, indem Sie ∂G in die beiden Teilflächen

$$F_1 = \left\{ (1, x_2, x_3) \big| \ \sqrt{x_2^2 + x_3^2} \leq \sqrt{3} \right\}$$

und

$$F_2 = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \big| \ x_1 \in (1,2),\ \sqrt{x_2^2 + x_3^2} = \sqrt{4 - x_1^2} \right\}$$

aufteilen. Dort wählen Sie geeignete Parametrisierungen

$$f_{F_1} : E_1 := (0, \sqrt{3}) \times (0, 2\pi) \to F_1, \qquad f_{F_1}(r, \varphi) = \begin{pmatrix} 1 \\ r \sin\varphi \\ r\cos\varphi \end{pmatrix},$$

$$f_{F_2} : E_2 := (1,2) \times (0, 2\pi) \to F_2, \qquad f_{F_2}(x_1, \varphi) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \sqrt{4 - x_1^2}\sin\varphi \\ \sqrt{4 - x_1^2}\cos\varphi \end{pmatrix},$$

um damit die Integrale

$$A_{E_i}(f_{F_i}) = \int\limits_{E_i} J f_{F_i} \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\varphi, \qquad i = 1, 2,$$

zu berechnen, wobei $Jf_{F_i} = \sqrt{\det(Df_{F_i}^T \cdot Df_{F_i})}$ und Df_{F_i} die Jacobimatrix der Funktion f_{F_i} bezeichnet.