Aufgabe 36 **10 Punkte**

Seien $G = (0,1) \subset \mathbb{R}$ und $N \in \mathbb{N}$. Definiere $x_j = j/N$ für $j \in \{0, \dots, N\}$, $h := 1/N$ sowie $I_j := (x_{j-1}, x_j)$ für $j \in \{1, \dots, N\}$. Ferner sei

$$X_h := \left\{ v \in C(\overline{G}) \;\middle|\; v|_{I_j} \in \mathbb{P}_1(I_j) \text{ für } j = 1, \dots, N \right\}$$

und $(\varphi_0, \dots, \varphi_N)$ sei die Knotenbasis von X_h, d.h. $\varphi_j \in X_h$, $\varphi_j(x_k) = \delta_{jk}$ für $j, k \in \{0, \dots, N\}$. Für jedes $j \in \{1, \dots, N\}$ ist $X_h|_{I_j} = \mathbb{P}_1(I_j)$ mit dem L^2-Skalarprodukt ein zweidimensionaler Hilbertraum. Mit $\varphi_{j,1} = \varphi_j|_{I_j}$ und $\varphi_{j,2} = \varphi_{j-1}|_{I_j}$ ist $(\varphi_{j,1}, \varphi_{j,2})$ eine Basis von $X_h|_{I_j}$. Es existiert eine duale Basis $(\psi_{j,1}, \psi_{j,2})$ in $X_h|_{I_j}$, die erfüllt

$$\int_{I_j} \varphi_{j,l}(x) \psi_{j,k}(x)\, dx = \delta_{lk}, \quad k, l \in \{1, 2\}.$$

Für $u \in L^1(G)$ definieren wir nun die Interpolierende $\Pi_h u \in X_h$ durch

$$\Pi_h u := \sum_{j=0}^{N} \varphi_j \int_{I_j} \psi_{j,1}(y) u(y)\, \mathrm{d}y.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\Pi_h : L^1(G) \to X_h$ wohldefiniert, linear und stetig ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\Pi_h u_h = u_h$ für alle $u_h \in X_h$ gilt.

(c) Für $j \in \{1, \dots, N\}$ sei $S_j := I_{j-1} \cup I_j \cup I_{j+1}$, wobei $I_0 := I_{N+1} = \emptyset$. Zeigen Sie, dass für alle $u \in L^1(G)$ und $j \in \{1, \dots, N\}$ gilt

$$\int_{I_j} |\Pi_h u|\, dx + \int_{I_j} h\, |(\Pi_h u)'|\, \mathrm{d}x \le c \int_{S_j} |u|\, \mathrm{d}x,$$

wobei c unabhängig von u, j und N ist.

Aufgabe 37 **2 Punkte**

Sei $u \in L^p(\Omega)$ mit $1 \le p < \infty$. Zeigen Sie, dass für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ mit $|h| < \operatorname{dist}(\operatorname{supp} \varphi, \partial\Omega)$ gilt

$$\int_\Omega \Delta_i^h u\, \varphi\, \mathrm{d}x \;=\; -\int_\Omega u\, \Delta_i^{-h} \varphi\, \mathrm{d}x.$$

Hier ist $\Delta_i^h u$ für $x \in \Omega$ und $|h| < \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$ wie in Aufgabe 15 definiert.

Bitte wenden!

Aufgabe 38 **4 Punkte**

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein offenes, beschränktes Gebiet mit polygonalem Rand. Seien $a \in C^0(\overline{\Omega})$ mit $a > 0$ in Ω und $f \in L^2(\Omega)$. Außerdem sei $\mathcal{T}_h$ eine zulässige Triangulierung von $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und $X_h = \{v_h \in C^0(\overline{\Omega}) \mid v_h|_T \in \mathbb{P}_1(T) \text{ für alle } T \in \mathcal{T}_h\}$.

(a) Zeigen Sie, dass eine schwache Lösung $u \in \mathring{H}^1(\Omega)$ von $-\operatorname{div}(a\nabla u) = f$ in Ω, $u = 0$ auf $\partial\Omega$ existiert. (Was ist die schwache Formulierung?)

(b) Sei $u_h \in X_h \cap \mathring{H}^1(\Omega)$ die diskrete Lösung des Problems aus (a). Zeigen Sie, dass es eine Funktion $\overline{a} : \Omega \to \mathbb{R}$ gibt, die konstant auf jedem $T \in \mathcal{T}_h$ ist und

$$\int_\Omega \overline{a}\, \nabla u_h \nabla \varphi_h \,\mathrm{d}x = \int_\Omega f \varphi_h \,\mathrm{d}x$$

für alle $\varphi_h \in X_h \cap \mathring{H}^1(\Omega)$ erfüllt.

Aufgabe 39 **4 Punkte**

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein offenes, beschränktes Normalgebiet und seien $f \in L^2(\Omega),\ a \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Außerdem sei $u \in H^1(\Omega)$ so, dass für alle $\varphi \in H^1(\Omega)$ gilt

$$\int\limits_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \,\mathrm{d}x + \int\limits_\Omega a u \cdot \nabla \varphi \,\mathrm{d}x = \int\limits_\Omega f \varphi \,\mathrm{d}x.$$

Formulieren Sie das zugehörige klassische Problem inklusive der vorzugebenden Randbedingungen.