Aufgabe 40 — 12 Punkte

Wir übernehmen die Notation aus Aufgabe 36. Sei $1 \le p < \infty$. Zeigen Sie, dass eine von u und N unabhängige Konstante $c > 0$ derart existiert, dass das Folgende gilt:

(a) Für alle $j \in \{1, \dots, N\}$ gilt
$$\|\Pi_h u\|_{L^\infty(I_j)} \le c \fint_{I_j} |\Pi_h u(x)| \,\mathrm{d}x.$$

(b) Für alle $u \in L^p(G)$ gilt
$$\|\Pi_h u\|_{L^p(G)} \le c \,\|u\|_{L^p(G)}.$$

Tipp: Verwenden Sie (a), Aufgabe 36(c) und die Jensen-Ungleichung.

(c) Für alle $u \in L^p(G)$ gilt
$$\|\Pi_h u - u\|_{L^p(G)} \le c \inf_{w \in X_h} \|u - w\|_{L^p(G)}.$$

Tipp: Aufgabe 36(b).

(d) Für alle $u \in H^{1,p}(G)$ gilt
$$\|(\Pi_h u - u)'\|_{L^p(G)} \le c \inf_{w \in X_h} \|(u - w)'\|_{L^p(G)}.$$

Tipp: Zeigen Sie zunächst
$$\int_{I_j} |(\Pi_h u)'| \,\mathrm{d}x \le c_1 h^{-1} \int_{S_j} \left| u(x) - \fint_{S_j} u(y) \,\mathrm{d}y \right| \mathrm{d}x \le c_2 \int_{S_j} |u'| \,\mathrm{d}x.$$

(e) Für alle $u \in H^{1,p}(G)$ gilt
$$\|\Pi_h u - u\|_{L^p(G)} \le c\, h \,\|u'\|_{L^p(G)}.$$

Aufgabe 41 — 5 Punkte

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und sei $f \in H^{-2}(\Omega) := (\mathring{H}^2(\Omega))^*$. Der Bilaplace von u ist durch $\Delta^2 u = \Delta(\Delta u)$ definiert. Eine Funktion $u \in \mathring{H}^2(\Omega)$ heißt schwache Lösung des Randwertproblems für die biharmonische Gleichung
$$\begin{aligned} \Delta^2 u &= f && \text{in } \Omega, \\ u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega, \\ \tfrac{\partial u}{\partial \nu} &= 0 && \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{1}$$
wenn für alle $\varphi \in \mathring{H}^2(\Omega)$ gilt
$$\int_\Omega \Delta u \Delta \varphi \,\mathrm{d}x = \langle f, \varphi \rangle.$$
Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Lax-Milgram, dass (2) genau eine schwache Lösung hat.

Tipp: Zeigen Sie $\int_\Omega (\Delta v)^2 \,\mathrm{d}x = \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega (\partial_i \partial_j v)^2 \,\mathrm{d}x$ für alle $v \in C_0^\infty(\Omega)$ und verwenden Sie (ohne Beweis):
$$\mathring{H}^2(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H^2(\Omega)}}.$$

Aufgabe 42 — 3 Punkte

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Zeigen Sie, dass eine Konstante $c > 0$ existiert so, dass für alle Vektorfelder $u \in \mathring{H}^1(G, \mathbb{R}^n)$ gilt
$$\int_G |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x \le c \int_G \left| \frac{\nabla u + (\nabla u)^\top}{2} \right|^2 \mathrm{d}x.$$