s'Rechebläddle

Prof. Dr. M. Růžička, Dr. M. Křepela · **Woche 12** · Abgabe bis 27.1.2020, 10 Uhr

Aufgabe 43 **6 Punkte**

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand. Es seien $u \in C^2(\overline{G}, \mathbb{R}^n) \cap \mathring{H}^1(G, \mathbb{R}^n)$ und $p \in C^1(\overline{G})$ eine Lösung des Stokes-Systems

$$\begin{aligned} -\Delta u + \nabla p &= f && \text{in } G, \\ \operatorname{div} u &= 0 && \text{in } G, \\ u &= 0 && \text{auf } \partial G \end{aligned}$$

zu gegebener rechter Seite $f \in C^0(\overline{G}, \mathbb{R}^n)$. Ferner sei

$$X := \{ w \in \mathring{H}^1(G, \mathbb{R}^n) \mid \operatorname{div} w = 0 \text{ f.ü. in } G \}.$$

Zeigen Sie das Folgende:

(a) Das Vektorfeld u ist eine schwache Lösung des Stokes-Systems, d.h. $u \in X$ erfüllt

$$\sum_{i=1}^n \int_G \nabla u_i \cdot \nabla \varphi_i \,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^n \int_G f_i \,\varphi_i \,\mathrm{d}x \qquad \text{für alle } \varphi \in X.$$

(b) Der Raum X ist ein abgeschlossener Teilraum von $\mathring{H}^1(G, \mathbb{R}^n)$.

(c) Zu jedem $f \in L^2(G, \mathbb{R}^n)$ existiert eine eindeutige schwache Lösung $u \in X$.

Aufgabe 44 **2 Punkte**

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Normalgebiet. Zeigen Sie, dass für jedes $u \in \mathring{H}^1(G)$ und $i \in \{1, \ldots, n\}$ gilt

$$\int_G \partial_i u \, u \,\mathrm{d}x = 0.$$

Aufgabe 45 **4 Punkte**

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Normalgebiet. Betrachten Sie das Randwertproblem

$$\begin{aligned} -\Delta u + \beta \cdot \nabla u &= f && \text{in } G, \\ u &= 0 && \text{auf } \partial G \end{aligned}$$

zu gegebener rechter Seite $f \in L^2(G)$ und $\beta \in \mathbb{R}^n$. Finden eine sinnvolle schwache Formulierung und weisen Sie Existenz und Eindeutigkeit einer schwachen Lösung nach.

Tipp: Verwenden Sie den Satz von Lax–Milgram und Aufgabe 44.

Aufgabe 46 **8 Punkte**

Sei A ein nichtleerer, abgeschlossener Unterraum eines Hilbertraums H. Sei

$$A^\perp := \{ x \in H \mid (x, y) = 0 \text{ für alle } y \in A \}$$

das *orthogonale Komplement von* A. Zeigen Sie das Folgende:

(a) Die Menge $A^\perp$ ist ein abgeschlossener Unterraum von H.

(b) Für jedes $x \in H$ gibt es genau ein Element $Px \in A$ so, dass $(Px - x, y) = 0$ für alle $y \in A$ gilt.

Tipp: Zeigen Sie zunächst, dass die Abbildung $y \mapsto (x, y)$ mit festem $x \in H$ linear und stetig in A ist.

(c) Die *orthogonale Projektion* $P : H \to A$, definiert durch $P : x \mapsto Px$, ist linear und stetig und für $A \neq \{0\}$ gilt $\|P\|_{L(H)} = 1$.

(d) Zu jedem $x \in H$ existiert genau eine Darstellung $x = y + z$ mit $y \in A$ und $z \in A^\perp$.