Aufgabe 47 **3 Punkte**

Sei H ein Hilbertraum. Zeigen Sie, dass für jedes $x \in H$ gilt

$$\|x\| = \max_{\|y\| \leq 1} (x, y).$$

Aufgabe 48 **5 Punkte**

Sei $u_n(x) := \frac{1}{n} \sin(nx)$, $x \in I = [-\pi, \pi]$. Zeigen Sie, dass die Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H^1(I)$ beschränkt ist und dass $u_n \rightharpoonup 0$ in $H^1(I)$ und $u_n \to 0$ in $L^2(I)$ für $n \to \infty$ gilt. Bestimmen Sie, ob (u_n) stark in $H^1(I)$ konvergiert, und begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 49 **8 Punkte**

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein offenes, beschränktes Lipschitzgebiet und sei $f \in (\mathring{H}^1(\Omega))^*$ gegeben. Seien $X_n \subset \mathring{H}^1(\Omega)$, $n \in \mathbb{N}$, lineare Teilräume von $\mathring{H}^1(\Omega)$ mit $\dim X_n = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und

$$\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n} = \mathring{H}^1(\Omega).$$

Zeigen Sie das Folgende:

(a) Für $n \in \mathbb{N}$ existiert eine eindeutige Lösung $u_n \in X_n$ von

$$\int_\Omega \nabla u_n \cdot \nabla \varphi_n \, \mathrm{d}x + \int_\Omega u_n \varphi_n \, \mathrm{d}x = f(\varphi_n) \qquad \forall \varphi_n \in X_n. \tag{1}$$

(b) Die Folge u_n von Lösungen von (2) ist in $\mathring{H}^1(\Omega)$ unabhängig von n beschränkt.

(c) Es existiert $u \in \mathring{H}^1(\Omega)$ so, dass

$$u_n \rightharpoonup u \qquad \text{in } \mathring{H}^1(\Omega)$$

und

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \, \mathrm{d}x + \int_\Omega u \varphi \, \mathrm{d}x = f(\varphi) \qquad \forall \varphi \in \mathring{H}^1(\Omega) = \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n}.$$

Aufgabe 50 **4 Punkte**

Sei $G \in \mathbb{R}^n$ ein offenes Gebiet, $G_0 \subset G$ mit $\overline{G_0} \subset G$ und $h \in (0, \operatorname{dist}(G_0, \partial G))$. Seien $u \in H^{1,p}(G)$ und $v \in H^{1,q}(G)$, wobei p, $q \in (1, \infty)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ gilt. Zeigen Sie, dass

$$\Delta_i^h(uv)(x) = u(x + he_i)\Delta_i^h v(x) + v(x)\Delta_i^h u(x)$$

für alle $x \in G_0$ und $i \in \{1, \dots, n\}$ gilt und $\Delta_i^h(uv) \in L^1(G_0)$ ist.