Aufgabe 51 — 6 Zusatzpunkte

Seien

$$\begin{aligned} E &:= (0,1) \times \left(0, \tfrac{3\pi}{2}\right), \\ \Omega &:= \left\{(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \mid (r,\varphi) \in E\right\}. \end{aligned}$$

Definiere

$$v_0(r,\varphi) := \begin{cases} \sin\left(\frac{2\varphi}{3}\right), & \text{falls } r = 1 \text{ und } \varphi \in \left(0, \frac{3\pi}{2}\right), \\ 0, & \text{falls } r \in (0,1) \text{ und } \varphi \in \left\{0, \frac{3\pi}{2}\right\}, \end{cases}$$

und

$$v(r,\varphi) := r^{\frac{2}{3}} \sin\left(\tfrac{2\varphi}{3}\right) \text{ für } (r,\varphi) \in E.$$

Weiter seien $u : \Omega \to \mathbb{R}$ und $u_0 : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ solche Funktionen, dass

$$v(r,\varphi) = u(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = u(x,y) \quad \text{und} \quad v_0(r,\varphi) = u_0(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = u_0(x,y)$$

gilt. Zeigen Sie das Folgende:

(a) Die Funktion u ist eine schwache Lösung der Laplace-Gleichung

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 && \text{in } \Omega, \\ u &= u_0 && \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Tipp: Aufgabe 4.

(b) Es gilt

$$\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \int_0^1 \left| \frac{\partial^2}{\partial r^2} v(r,\varphi) \right|^2 r \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = \infty.$$

(c) Es gilt $u \notin H^2(\Omega)$.
Tipp: Zeigen Sie

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}\lambda_2(x,y) = \int_\Omega \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial xy}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2 \mathrm{d}\lambda_2(x,y) = \infty$$

mit Hilfe von (b) und des Transformationssatzes.

Aufgabe 52 — 4 Zusatzpunkte

Finden Sie ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ und eine Funktion $f \in H^{1,1}(\Omega)$ derart, dass für beliebiges Gebiet $G \subset \mathbb{R}^2$ mit $\overline{\Omega} \subset G$ keine Funktion $u \in H^{1,1}(G)$ existiert so, dass $f = u\big|_\Omega$ gilt.