s'Rechebläddle

Prof. Dr. M. Růžička, Dr. M. Křepela · **Woche 2** · Abgabe bis 4.11.2019, 10 Uhr

Aufgabe 5 **7 Punkte**

Zeigen Sie, dass die Funktion

$$\Phi(y,x) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{|y-x|} - \frac{1}{|f_1(y)-x|} + \frac{1}{|f_2(y)-x|} - \frac{1}{|f_3(y)-x|}\right)$$

mit

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \qquad f_1(y) = \begin{pmatrix} -y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \qquad f_2(y) = \begin{pmatrix} -y_1 \\ -y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \qquad f_3(y) = \begin{pmatrix} y_1 \\ -y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

eine greensche Funktion für das Gebiet $G := \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1 > 0,\ x_2 > 0\}$ ist.

Aufgabe 6 **4 Punkte**

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein offenes Gebiet. Sei $u \in C(\Omega)$ derart, dass für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ gilt

$$\int_\Omega u\varphi \,\mathrm{d}x = 0.$$

Zeigen Sie, dass dann $u = 0$ auf Ω gilt.

Aufgabe 7 **5 Punkte**

Sei $(a,b) \subset \mathbb{R}$ ein beschränktes Intervall und seien $A, B \in \mathbb{R}$.

(a) Finden Sie eine Funktion mit den folgenden Eigenschaften:

$$u \in C^2((a,b)) \cap C([a,b]), \quad u'' = 0 \text{ in } (a,b), \quad u(a) = A \quad \text{und} \quad u(b) = B. \qquad (*)$$

(b) Zeigen Sie, dass jede Funktion mit den Eigenschaften aus $(*)$ sowohl ihr Minimum als auch ihr Maximum auf dem Rand von (a,b) annimmt.

(c) Folgern Sie, dass genau eine Funktion mit den Eigenschaften aus $(*)$ existiert.

(d) Zeigen Sie, dass die Lösung von $(*)$ die Mittelwerteigenschaft besitzt, d.h. dass für alle $x_0 \in (a,b)$ und alle $\varepsilon > 0$ mit $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon) \subset (a,b)$ gilt

$$u(x_0) = \frac{1}{2\varepsilon}\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} u(y)\,\mathrm{d}y.$$

Aufgabe 8 **4 Punkte**

Sei $c \in \mathbb{R}$. Finden Sie *allgemeine* Lösungen $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der gewöhnlichen Differentialgleichung $h''(t) = ch(t)$ für die drei Fälle $c < 0,\ c = 0,\ c > 0$. Denken Sie dabei auch an Linearkombinationen von Lösungen.