Aufgabe 9 **12 Punkte**

Sei $G := (0,\pi) \times (0,\pi)$ und $\varphi \in C(\partial G)$. Der Rand ∂G lässt sich wie folgt aufschreiben:

$$\partial G = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4 := \{0\} \times [0,\pi] \cup \{\pi\} \times [0,\pi] \cup (0,\pi) \times \{0\} \cup (0,\pi) \times \{\pi\}.$$

Das Ziel dieser Aufgabe ist, eine Lösung $u \in C^2(G) \cap C(\overline{G})$ der Gleichung

$$-\Delta u = 0 \quad \text{auf } G, \tag{1}$$
$$u = \varphi \quad \text{auf } \partial G \tag{2}$$

zu finden. Wir machen das in folgenden Schritten:

(a) Setzen Sie voraus, dass $u \not\equiv 0$ die Gleichung (1) erfüllt und die Form

$$u(x,y) = f(x)g(y) \tag{3}$$

hat. Zeigen Sie, dass ein $c \in \mathbb{R}$ derart existiert, dass

$$\frac{f''(x)}{f(x)} = -\frac{g''(y)}{g(y)} = c$$

für alle $(x,y) \in G$ gilt.

(b) Leiten Sie Funktionen u der Form (3) her, die (1) erfüllen.
Tipp: Unterscheiden Sie die Fälle $c > 0$, $c = 0$, $c < 0$ in (a) und nutzen Sie Aufgabe 8.

(c) Sei $w(x,y) = Ax + By + Cxy + D$. Bestimmen Sie die Koeffizienten $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ so, dass $w(x,y) = \varphi(x,y)$ in allen vier Eckpunkten (x,y) gilt. Beachten Sie, dass w in G harmonisch ist.

(d) Sei $\varphi \in C(\partial G)$ so, dass $\varphi\big|_{\Gamma_i} \equiv 0$ für $i \in \{2,3,4\}$ ist. Zeigen Sie, dass reelle Koeffizienten $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existieren so, dass für fast alle $y \in [0,\pi]$ gilt

$$\varphi_1(0,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(ny),$$

d.h. die Funktion $\varphi(0,\cdot)$ durch eine Sinus-Fourierreihe darstellbar ist.
Tipp: Für jede Funktion $\psi \in L^2(0,\pi)$ konvergiert ihre Fourierreihe zu ψ fast überall in $(0,\pi)$.

(e) Seien φ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wie in (d). Bestimmen Sie die Koeffizienten $a_n, b_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ so, dass die Funktion

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n e^{nx} + b_n e^{-nx}) c_n \sin(ny)$$

die Gleichung (1) mit der Randbedingung (2) erfüllt.
Tipp: Um (1) zu zeigen, dürfen Sie hier ohne Begründung die unendliche Summe und die Ableitung tauschen. Man kann rigoros ziegen, dass dieser Schritt zulässig ist, Sie müssen es aber nicht machen.

(f) Ähnlich wie in (e) kann man eine Lösung von (1) und (2) finden, falls $\varphi \in C(\partial G)$ die Bedingung $\operatorname{supp}\varphi \subset \overline{\Gamma_i}$ mit $i \in \{2,3,4\}$ erfüllt. Zeigen Sie mit Hilfe vorheriger Ergebnisse, wie man eine Lösung von (1) mit (2) für ein allgemeines $\varphi \in C(\partial G)$ findet.

Bitte wenden!

Aufgabe 10 **2 Punkte**

Sei $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ und sei A eine orthogonale $(n \times n)$-Matrix. Definiere $v(x) := u(Ax)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Zegen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\Delta v(x) = \Delta u(Ax).$$

Aufgabe 11 **6 Punkte**

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und sei u harmonisch auf G.

(a) Zeigen Sie, dass für alle Bälle $B = B_R(x) \subset G$ gilt

$$|\nabla u(x)| \leq \frac{n}{R} \sup_{y \in \partial B} |u(y)|.$$

Tipp: Zeigen Sie, dass jedes $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ harmonisch ist, und deshalb die Mittelwertgleichungen erfüllt.

(b) Sei $G' \subset G$, $\overline{G}' \subset G$ und $d := \operatorname{dist}(G', \partial G)$. Zeigen Sie, dass für alle Multiindizes $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| = \sum_{j=1}^{i} \alpha_j$ gilt

$$\sup_{y \in G'} |\partial^\alpha u(y)| \leq \left(\frac{n|\alpha|}{d} \right)^{|\alpha|} \sup_{y \in G} |u(y)|.$$