s'Rechebläddle

Prof. Dr. M. Růžička, Dr. M. Křepela · **Woche 4** · Abgabe bis 18.11.2019, 10 Uhr

Aufgabe 12 **5 Punkte**

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und $\alpha, \beta \in (0,1)$. Sei $g \in C^{0,\beta}(G)$. Zeigen Sie das Folgende:

(a) Falls $f \in C^{0,\alpha}(G) \cap L^\infty(G)$ und $g \in L^\infty(G)$ ist, gilt $fg \in C^{0,\min\{\alpha,\beta\}}(G)$.

(b) Falls $f \in C^{0,\alpha}(g(G))$ ist, gilt $f \circ g \in C^{0,\alpha\beta}(G)$.

Aufgabe 13 **4 Punkte**

Seien X, Y normierte Vektorräume und sei $f : X \to Y$ linear. Zeigen Sie, dass die folgenden Eigenschaften äquivalent sind:

(a) f ist beschränkt,

(b) f ist stetig in 0,

(c) f ist stetig,

(d) f ist Lipschitz-stetig.

Aufgabe 14 **6 Punkte**

Sei G ein beschränktes Gebiet und $\alpha \in [0, n)$. Weiterhin sei $A \in L^\infty(G \times G)$. Für $x \in G$ und $f \in L^2(G)$ definieren wir

$$(Tf)(x) := \int_G \frac{A(x,y)}{|x-y|^\alpha} f(y)\,\mathrm{d}y.$$

Zeigen Sie, dass T ein wohldefinierter, stetiger, linearer Operator von $L^2(G)$ nach $L^2(G)$ ist. Zeigen Sie insbesondere, dass es ein $C > 0$ gibt mit

$$\|Tf\|_{L^2(G)} \leq C\,\|f\|_{L^2(G)}$$

für alle $f \in L^2(G)$.

Aufgabe 15 **5 Punkte**

Für $u \in C(\mathbb{R}^n)$, $x \in \mathbb{R}^n$ und $h \in \mathbb{R}$ definiere

$$\Delta_i^h u(x) := \frac{u(x + he_i) - u(x)}{h},$$

wobei e_i den i-ten Einheitsvektor im $\mathbb{R}^n$ bezeichnet. Ferner sei

$$\Delta_h u(x) := \sum_{i=1}^n \Delta_i^{-h} \Delta_i^h u(x).$$

Zeigen Sie, dass $\Delta_h u$ konsistent von der Ordnung 2 ist, d.h. dass für $u \in C^4(\mathbb{R}^n)$ mit $\|\partial^\alpha u\|_\infty < \infty$ für $|\alpha| \leq 4$ gilt

$$\|\Delta_h u - \Delta u\|_\infty \leq c(u)h^2,$$

wobei die Konstante $c(u)$ unabhängig von h ist.

Tipp: Begründen Sie, warum gilt

$$u(x + he_i) = \sum_{k=0}^3 \frac{1}{k!} \frac{\partial^k}{\partial x_i^k} u(x) h^k + \frac{1}{24} \frac{\partial^4}{\partial x_i^4} u(x + \xi) \xi^4$$

mit gewissem $\xi \in \mathbb{R}^n$, $|\xi| \leq |h|$. Diese Entwicklung können Sie weiter nutzen.