Aufgabe 16 **5 Punkte**

Zeigen Sie durch ein Gegenbeispiel, dass der Raum $C^1(0,1)$ mit der Norm

$$\|f\|_{1,2} = \left(\int_0^1 |f(t)|^2 + |f'(t)|^2 \,\mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{2}}$$

kein Banachraum ist.

Aufgabe 17 **2 Punkte**

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Normalgebiet und $f \in C^1(G) \cap C(\overline{G})$ mit $\nabla f \in L^1(G)$. Zeigen Sie, dass f in G schwach differenzierbar ist und die klassische und schwache Ableitung in G übereinstimmen.

Aufgabe 18 **3 Punkte**

Zeigen Sie, dass die Funktion $\chi_{(0,1)}$ in $(-1,1)$ nicht schwach differenzierbar ist.

Aufgabe 19 **5 Punkte**

Sei G ein beschränktes Gebiet. Sei u eine *subharmonische Funktion* auf G, d.h. $u \in C^2(G)$ und $-\Delta u \leq 0$ in G. Zeigen Sie das Folgende:

(a) Für jeden Ball $B \subset G$ mit $\overline{B} \subset G$ gilt

$$u(x) \leq \frac{1}{|\partial B|} \int_{\partial B} u(\xi) \,\mathrm{d}o(\xi).$$

Tipp: Sei $B = B(x,R)$. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$\varphi(r) = \frac{1}{|\partial B(x,r)|} \int_{\partial B(x,r)} u(\xi) \,\mathrm{d}o(\xi)$$

monoton wachsend (für $r \in [0, \operatorname{dist}(x, \partial G))$) ist. Folgen Sie daraus das Ergebnis.

(b) Es gilt

$$\max_{x \in \overline{G}} u(x) = \max_{x \in \partial G} u(x).$$

Aufgabe 20 **5 Punkte**

Sei G ein beschränktes Gebiet, $f \in C(\overline{G})$ und $u \in C(\overline{G}) \cap C^2(G)$. Weiterhin sei $-\Delta u = f$ in G. Zeigen Sie, dass

$$\sup_G |u| \leq \sup_{\partial G} |u| + C \sup_G |f|$$

gilt, wobei $C > 0$ eine Konstante ist, die nur von $\operatorname{diam} G$ abhängt.

Tipp: Zeigen Sie, dass die Funktion

$$v(x) = u(x) + c_0\, x_1^2$$

mit einer geeigneten Konstante $c_0 > 0$ subharmonisch ist.