Aufgabe 21 **5 Punkte**

Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ und $B = \{x \in \mathbb{R}^n \,\big|\, |x| < e^{-1}\}$. Definiere die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \log|\log|x||, & x \in B \setminus \{0\}; \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $f \in H^{1,n}(B) \setminus C(B)$ gilt.

Aufgabe 22 **5 Punkte**

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Sei $u \in H^{1,1}(G)$ so, dass $\partial_i u(x) = 0$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ und fast alle $x \in G$ ist. Zeigen Sie, dass ein $c \in R$ derart existiert, dass $u = c$ fast überall in G ist.

Tipp: Sei $B \subset G$ ein Ball mit $\overline{B} \subset G$. Für $\varepsilon > 0$ sei u_ε die Regularisierung (Glättung) von u. Zeigen Sie, dass $u_\varepsilon(x) = c_\varepsilon \in \mathbb{R}$ für alle $x \in B$ und alle $\varepsilon \in (0, \operatorname{dist}(B, \partial G))$ gilt. Folgern Sie daraus das Ergebnis.

Aufgabe 23 **4 Punkte**

Sei $u \in H^{1,1}(0,1)$ und sei Du die schwache Ableitung von u in $(0,1)$. Zeigen Sie das Folgende:

(a) Es existiert eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ so, dass

$$u(x) = c + \int_0^x Du(s)\,\mathrm{d}s$$

für fast alle $x \in (0,1)$ gilt.

(b) Wenn zusätzlich $u \in \mathring{H}^{1,1}(0,1)$ ist, gilt $c = 0$ in (a).

Aufgabe 24 **6 Punkte**

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, $p \in [1, \infty)$ und $f, g \in H^{1,p}(G) \cap L^\infty(G)$. Zeigen Sie, dass $fg \in H^{1,p}(G)$ ist und

$$\partial_i(fg) = (\partial_i f)g + f\partial_i g$$

für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ fast überall in G gilt.

Tipp: Approximieren Sie f, g durch ihre Regularisierungen f_{ε_1}, g_{ε_2}.