Aufgabe 25 **5 Punkte**

Sei $\Omega \in \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, $1 \leq p < \infty$ und $u \in H^{1,p}(\Omega)$. Weiterhin sei $F \in C^1(\mathbb{R})$ mit $F' \in L^\infty(\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass $F \circ u \in H^{1,p}(\Omega)$ ist und

$$\partial_i(F \circ u) = (F' \circ u)\, \partial_i u$$

für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ gilt.

Aufgabe 26 **6 Punkte**

Sei $\Omega \in \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, $1 \leq p < \infty$ und $u \in H^{1,p}(\Omega)$. Zeigen Sie, dass auch u^+, u^-, $|u| \in H^{1,p}(\Omega)$ gilt, und bestimmen Sie die schwachen Ableitungen dieser Funktionen.

Tipp: Um das Ergebnis für u^+ zu zeigen, betrachten Sie die Funktion

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} \sqrt{u^2(x) + \varepsilon^2} - \varepsilon, & \text{falls } u(x) > 0; \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

mit $\varepsilon > 0$.

Aufgabe 27 **5 Punkte**

Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, $1 < p < \infty$, $p' = \frac{p}{p-1}$ und $f \in L^{p'}(\Omega)$. Sei X ein Unterraum von $\mathring{H}^{1,p}(\Omega)$ mit $\dim X < \infty$. Für $u \in X$ definieren wir

$$I(u) = \frac{1}{p} \int_\Omega |\nabla u|^p \,\mathrm{d}x - \int_\Omega f u \,\mathrm{d}x.$$

Zeigen Sie, dass I in X einen Minimierer besitzt, d.h. dass ein $v \in X$ derart existiert, dass

$$I(v) = \inf_{u \in X} I(u)$$

gilt.

Tipp: Zeigen Sie zunächst, dass jede Minimalfolge in $(X, \|\cdot\|_{H^{1,p}(\Omega)})$ beschränkt ist.

Aufgabe 28 **4 Punkte**

Sei $T \subset \mathbb{R}^n$ das Einheitssimplex mit den Eckpunkten $0, e_1, \ldots, e_n$, wobei $(e_i)_{i=1}^n$ die kanonische Basis von $\mathbb{R}^n$ ist. Seien $\varphi_0, \ldots, \varphi_n$ die Polynome ersten Grades auf T mit $\varphi_i(e_j) = \delta_{ij}$. Berechnen Sie die Steifigkeitsmatrix

$$S = \left(\int_T \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j \,\mathrm{d}x \right)_{i,j=0,\ldots,n}.$$