

**Aufgabe 29**
**3 Punkte**

Sei  $T \subset \mathbb{R}^n$  ein  $n$ -dimensionales Simplex mit entsprechenden baryzentrischen Koordinaten  $\lambda_0(x), \dots, \lambda_n(x)$  und sei  $\mu \in (0, 1)$ . Man definiere

$$S = \{x \in T \mid \lambda_n(x) = \mu\}.$$

Zeigen Sie, dass  $S$  ein  $(n - 1)$ -dimensionales Simplex ist, und bestimmen Sie die baryzentrischen Koordinaten  $\tilde{\lambda}_0(x), \dots, \tilde{\lambda}_{n-1}(x)$  (bezüglich  $S$ ) eines Punktes  $x \in S$  in Abhängigkeit von seinen Koordinaten  $\lambda_0(x), \dots, \lambda_n(x)$ .

**Aufgabe 30**
**7 Punkte**

Seien  $T \subset \mathbb{R}^n$  ein  $n$ -dimensionales Simplex und  $T_0$  das  $n$ -dimensionale Einheitssimplex in  $\mathbb{R}^n$ . Seien  $(\lambda_0(x), \dots, \lambda_n(x))$  und  $(\bar{\lambda}_0(y), \dots, \bar{\lambda}_n(y))$  die baryzentrischen Koordinaten bezüglich  $T$ , bzw.  $T_0$ . Für  $\alpha \in \mathbb{N}_0^{n+1}$  definiert man  $\alpha! = \alpha_0! \cdots \alpha_n!$ . Zeigen Sie das Folgende:

(a) Für alle  $\beta, \gamma \in \mathbb{N}_0$  gilt

$$\int_0^1 t^\beta (1-t)^\gamma dt = \frac{\beta! \gamma!}{(\beta + \gamma + 1)!}.$$

(b) Es gilt

$$\int_T \lambda^\alpha(x) dx = \frac{|T|}{|T_0|} \int_{T_0} \bar{\lambda}^\alpha(y) dy.$$

(c) Es gilt

$$\int_T \lambda^\alpha(x) dx = \frac{\alpha! n!}{(|\alpha| + n)!} |T|.$$

**Tipp:** Induktion nach  $n$ .

**Aufgabe 31**
**5 Punkte**

Sei  $T \subset \mathbb{R}^2$  ein zweidimensionales Simplex mit den Ecken  $a_0, a_1, a_2$  und Kantenmittelpunkten  $a_{01}, a_{02}, a_{12}$ . Ferner sei  $p \in \mathbb{P}_2(T)$ . Bestimmen sie den Wert des Integrals

$$\int_T p(x) dx$$

in Abhängigkeit von  $p(a_i)$  und  $p(a_{ij})$ , wobei  $i, j \in \{0, 1, 2\}$ ,  $i < j$  ist.

**Tipp:** Verwenden Sie die Darstellung quadratischer Polynome in baryzentrischen Koordinaten aus dem Skript.

**Aufgabe 32**
**5 Punkte**

Seien  $n, k \in \mathbb{N}$ . Zeigen Sie, dass eine Konstante  $C > 0$  derart existiert, dass für jeden Ball  $B \in \mathbb{R}^n$  und jedes Polynom  $p \in \mathbb{P}_k(B)$  gilt

$$\frac{1}{C} \|p\|_{L^\infty(B)} \leq \frac{1}{|B|} \|p\|_{L^1(B)} \leq C \|p\|_{L^\infty(B)}.$$

**Tipp:** In einem endlichdimensionellen Raum sind jede zwei Normen äquivalent.