Aufgabe 33 **3 Punkte**

Seien $G_1 \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet, $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine affine Abbildung und $G_2 = F(G_1)$. Sei $R_i \in L(H^{1,1}(G_i), L^2(\partial G_i))$ der Spur-Operator auf G_i, $i \in \{1, 2\}$. Zeigen Sie, dass für jedes $v \in H^{1,1}(G_2)$ gilt

$$R_2 v = R_1(v \circ F) \circ F^{-1}$$

fast überall in ∂G_2 im Sinne des entsprechenden Oberflächenmaßes.

Aufgabe 34 **12 Punkte**

Seien T_0 das 2-dimensionale Einheitssimplex in $\mathbb{R}^2$, T ein allgemeines 2-dimensionales Simplex in $\mathbb{R}^2$ und $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die affine Abbildung, die $F(T_0) = T$ erfüllt. Für $v \in H^1(T)$ definieren wir $I_T v$ durch die folgenden Bedingungen:

(i) $I_T v \in \mathbb{P}_2(T)$,

(ii) $(I_T v)(a) = 0$ für jede Ecke a des Dreiecks T,

(iii) $\int_K I_T v \,\mathrm{d}s = \int_K Rv \,\mathrm{d}s$ (als Kurvenintegrale) für jede Kante K des Dreiecks T, wobei Rv die Spur von v auf ∂T ist.

Zeigen Sie das Folgende:

(a) Es existieren eindeutig definierte Koeffizienten $d_0, d_1, d_2, d_{01}, d_{02}, d_{12} \in \mathbb{R}$ so, dass

$$(I_T v)(x(\lambda)) = \sum_{i=0}^{2} d_i \lambda_i + \sum_{0 \le i < j \le 2} d_{ij} \lambda_i \lambda_j$$

gilt, wobei $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$ die baryzentrischen Koordinaten von $x \in T$ sind. Daraus folgt, dass $I_T v$ wohldefiniert ist. Berechnen Sie explizit die Koeffizienten d_i, d_{ij}.

(b) Es gilt

$$I_T v = I_{T_0}(v \circ F) \circ F^{-1}.$$

Tipp: Sei $I_T v$ durch die obige Gleichung definiert. Zeigen Sie, dass es die Bedingungen (i)–(iii) erfüllt.

(c) Es gilt

$$|I_T v|_{H^1(T)} \le C_1 |I_{T_0}(v \circ F)|_{H^1(T_0)} \le C_2 \|v \circ F\|_{H^1(T_0)} \le C_3 \big(h(T)^{-1} \|v\|_{L^2(T)} + \|\nabla v\|_{L^2(T)} \big),$$

wobei C_k positiven Konstanten sind, die nur von der Größe $\sigma(T) = h(T)/\varrho(T)$ abhängen.

Tipp: Für die zweite Ungleichung stellen Sie $I_{T_0}(v \circ F)$ durch die Knotenbasis von $\mathbb{P}_2(T_0)$ dar.

Aufgabe 35 **5 Punkte**

Sei T ein 2-dimensionales Simplex in $\mathbb{R}^2$ und $v = (v_1, v_2) \in H^1(T, \mathbb{R}^2)$ ein Vektorfeld. Definiere $I_T v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ durch

$$I_T v = (I_T v_1, I_T v_2)\,,$$

wobei $I_T v_i$ wie in Aufgabe 34 definiert sind. Zeigen Sie, dass dann gilt

$$\int_T \operatorname{div}(I_T v - v) \,\mathrm{d}x = 0.$$

Tipp: Approximieren Sie v durch glatte Funktionen. Beachten Sie, dass aus Aufgabe 34 folgt $I_T \in L(H^1(T, \mathbb{R}^2), \mathbb{P}_2(T, \mathbb{R}^2))$.