Abteilung für
Angewandte Mathematik

Prof. Dr. M. Růžička
M.Sc. S. Wolff-Vorbeck

5. November 2019

Praktische Übung zur Vorlesung

Einführung in Theorie und Numerik Partieller Differentialgleichungen

WS 2019/20 — Blatt 2

Abgabe: 20.11.2019, via Email an den Tutor.

Aufgabe 1 (Finite Differenzen in 2D) (4 Punkte)
Wir betrachten das Randwertproblem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f(x), \text{ auf } \Omega, \\ u &= 0, \text{ auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Implementieren Sie ein Finite-Differenzen-Verfahren zur Lösung des obigen Randwertproblems mit $f(x) = 1$ auf dem Gebiet $\Omega = (0,1)^2$. Nutzen Sie zur Approximation des Laplace-Operators den Differenzenquotienten

$$\Delta u_{i,m} \approx \frac{u_{i+1,m} + u_{i,m+1} - 4u_{i,m} + u_{i-1,m} + u_{i,m-1}}{(\Delta x)^2}$$

und visualisieren Sie Ihre Ergebnisse.

Aufgabe 2 (Eine Triangulierung) (4 Punkte)
Eine gleichmäßige Triangulierung des Gebeites $\Omega = [0,1]^2$ kann wie folgt durchgeführt werden: Sie starten mit dem Gebiet Ω, welches Sie durch ziehen einer Geraden durch die Punkte $(0,0)$ und $(1,1)$ in zwei gleichgroße Dreiecke unterteilt haben. Diese beiden Dreiecke werden nun jeweils in vier weitere Dreiecke unterteilt, indem Sie innerhalb eines Dreiecks die Seitenmittelpunkte miteinander verbinden. Auf diese Weise erhalten Sie eine Triangulierung von $\Omega = [0,1]^2$ mit acht Dreiecken.
Dieses Verfahren kann analog fortgesetzt werden um eine beliebig feine, gleichmäßige Triangulierung zu bekommen.

(a) Führen Sie den oben beschriebenen ersten Schritt der Triangulierung per Hand durch und speichern Sie die Koordinaten der Eckpunkte der Dreiecke in eine 9×2 Matrix. Schreiben Sie zudem die Knoten der Dreiecke in eine 8×3 Matrix.

(b) Visualisieren Sie die Triangulierung in einem 2D-Plot.

(c) Erweitern Sie Ihr Programm um die $? \times 2$ Matrizen Nb und Db, welche die Knotenpunkte der zu den jeweiligen Neumann- bzw. Dirichlet-Randbedingungen gehörenden Kanten beinhalten.

Aufgabe 3 (P1-Finite Elemente) (2 Punkte)

(a) Plotten Sie zur obigen Triangulierung die lineare Basisfunktion s_{p_i} mit $p_i = (0.5, 0.5)$, welche durch die Forschrift $s_{p_i}(p_j) = \delta_{ij}$, für alle Eckpunkte p_j der Dreiecke, gegeben ist.

(b) Plotten Sie nun den Gradienten ∇s_{p_i} auf jedem Dreieck der obigen Triangulierung.