Abteilung für
Angewandte Mathematik

Prof. Dr. M. Růžička
M.Sc. S. Wolff-Vorbeck

8. Januar 2020

Praktische Übung zur Vorlesung

Einführung in Theorie und Numerik Partieller Differentialgleichungen

WS 2019/20 — Blatt 5

Abgabe: 15.1.2019, via Email an den Tutor.

Aufgabe 1 (8 Punkte)

(a) Erweitern Sie ihr Programm von Blatt 4 so, dass Sie nun die diskrete schwache Lösung u_h des Problems

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{in } \Omega, \\ u &= u_D \quad \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned}$$

mit $f = 1$ und $u_D = \sin(2\pi x)$ sowie $\Omega = [0,1]^2$ berechnen können.

(b) Erweitern Sie nun Ihr Programm um die Neumann-Randbedingung $\nabla u \cdot \eta = 1$ auf

$$\Gamma_N = \{1; 0\} \times [0,1] \cup [0,1] \times \{1\}.$$

Die Dirichlet-Randbedingungen auf $\Gamma_D = [0,1] \times \{0\}$ sind wie in Teil a) gegeben.

(c) Berechnen Sie den Fehler $\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)}$ für $u = \sin(\pi x)\sin(\pi y)$ und visuallisieren Sie diesen für $red = 2, 3, ..., 8$.

Aufgabe 2 (2 Punkte)

Modifizieren Sie das Programm aus Aufgabe 1, sodass das Randwertproblem

$$-\operatorname{div}(K\nabla u) = f \text{ in } \Omega, u = u_D \text{ auf } \Gamma_D, \; K\nabla u \cdot \eta = g \text{ auf } \Gamma_N$$

gelöst wird. Dabei sei $K\colon \Omega \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ eine stückweise stetige Abbildung, sodass $K(x)$ für fast alle $x \in \Omega$ symmetrisch und positiv definit ist. Testen Sie Ihr Programm mit den Randwerten aus Aufgabe 1 b) sowie der Matrix

$$K(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & \sin(x) \\ \sin(x) & 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3 (Massenmatrix und gelumpte Matrix) (5 Punkte)

Erweitern Sie das obige Programm um die Assemblierung der Massenmatrix M sowie der gelumpten Matrix L, einer Diagonalmatrix. Diese sind jeweils gegeben durch

(a) Massenmatrix:

$$M_{ij} = \int_\Omega \phi_i \phi_j.$$

(b) Gelumpte Matrix:

$$L_{ii} = \int_\Omega \phi_i$$

Frohe Weihnachten und einen guten Start ins neue Jahr!