Einführung in Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen

Wintersemester 2019/2020

Prof. Dr. Michael Růžička

basierend auf einem Skript von G. Dziuk

Version 12. Februar 2020

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Der Laplace-Operator

1.1 Der Gaußsche Integralsatz und die Greenschen Formeln

Zunächst legen wir fest, was unsere Mindestanforderungen an das Gebiet G sind, in dem wir die Poissongleichung lösen wollen. Wir nennen solche Gebiete Normalgebiete. Es sind Gebiete, deren Rand aus gutartigen Hyperflächenstücken zusammengesetzt ist. Erst aber sagen wir, was ein Flächenstück und ein Oberflächenintegral sind. Zur Erinnerung: ein Gebiet ist eine offene wegweise zusammenhängende Menge.

1.1 Definition. *Eine Menge $F \subset \mathbb{R}^n$ heißt* **reguläres Hyperflächenstück** *der Klasse C^k $(k \in \mathbb{N})$, wenn sie sich in der Form $F = x(T)$,*

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(t_1, \ldots, t_{n-1}), \\ &\vdots \\ x_n &= x_n(t_1, \ldots, t_{n-1}), \end{aligned}$$

mit $t = (t_1, \ldots, t_{n-1}) \in T \subset \mathbb{R}^{n-1}$ darstellen läßt. Dabei ist T ein beschränktes Gebiet im $\mathbb{R}^{n-1}$, und es ist $x \in C^0(\overline{T}, \mathbb{R}^n) \cap C^k(T, \mathbb{R}^n)$. Außerdem ist $x : \overline{T} \to \mathbb{R}^n$ injektiv mit

$$\textit{Rang} \quad \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial t_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_1}{\partial t_{n-1}} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial x_n}{\partial t_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_n}{\partial t_{n-1}} \end{pmatrix} = n - 1.$$

Mit D_i, $i = 1, \dots, n$ bezeichnen wir die Funktionen

$$D_i = (-1)^{n+i} \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial t_1} & \cdots\cdots & \frac{\partial x_1}{\partial t_{n-1}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_{i-1}}{\partial t_1} & \cdots\cdots & \frac{\partial x_{i-1}}{\partial t_{n-1}} \\ \frac{\partial x_{i+1}}{\partial t_1} & \cdots\cdots & \frac{\partial x_{i+1}}{\partial t_{n-1}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial t_1} & \cdots\cdots & \frac{\partial x_n}{\partial t_{n-1}} \end{vmatrix}.$$

Die Vektoren $\nu = \pm(\nu_1, \dots, \nu_n)$

$$\nu_i = \frac{D_i}{\sqrt{D_1^2 + \cdots + D_n^2}} \quad (i = 1, \dots, n)$$

heißen die zu F im Punkt $x = x(t)$ gehörenden **Normalen**. *Für $f \in C^0(F)$ heißt*

$$\int\limits_F f(x)\, do(x) = \int\limits_T f(x(t)) \sqrt{D_1^2(t) + \cdots + D_n^2(t)}\, dt$$

Oberflächenintegral *von f über F, wenn*

$$\int\limits_T \Big| f(x(t)) \Big| \sqrt{D_1^2(t) + \cdots + D_n^2(t)}\, dt < \infty$$

endlich ist.

1.2 Definition. *Ein beschränktes Gebiet $G \subset \mathbb{R}^n$ heißt* **Normalgebiet**, *falls folgende Bedingungen erfüllt sind:*

(a) *Zu jedem Randpunkt $x' \in \partial G$ gibt es eine Folge $(x^{(p)}) \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{G}$, $(p \in \mathbb{N})$ mit $x^{(p)} \to x'$ $(p \to \infty)$.*

(b) *$\partial G = \overline{F}_1 \cup \cdots \cup \overline{F}_N$ mit regulären Hyperflächenstücken F_j $(j = 1, \dots, N)$ der Klasse C^1 und es gilt:*

$$\overline{F}_i \cap \overline{F}_j = \partial F_i \cap \partial F_j \quad (i \neq j).$$

Dabei ist $\partial F := \overline{F} \setminus F$. Außerdem existiere $\int\limits_{F_j} do$ $(j = 1, \dots, N)$.

(c) *Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es endlich viele Kugeln $K_j = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - x^{(j)}| \le \rho_j\}$ mit $x^{(j)} \in \partial F_1 \cup \cdots \cup \partial F_N$, $\rho_j > 0$, $(j = 1, \ldots, q = q(\varepsilon))$, so dass*

$$\partial F_1 \cup \cdots \cup \partial F_N \subset \bigcup_{j=1}^{q} K_j \quad \textit{und} \quad \sum_{j=1}^{q} \rho_j^{n-1} \le \varepsilon.$$

Für ein Normalgebiet G ist das Oberflächenintegral definiert als

$$\int\limits_{\partial G} f\, do := \sum_{j=1}^{N} \int\limits_{F_j} f\, do.$$

Bemerkungen. • Ein beschränktes Gebiet, das diese Bedingung nicht erfüllt ist zum Beispiel eine Kugel, aus der ein Punkt herausgenommen wurde, $G = \{x \in \mathbb{R}^n | \, 0 < |x| < 1\}$.

- Für die Numerik sind Normalgebiete sehr praktisch. In der Theorie der partiellen Differentialgleichungen ist allerdings eine andere Definition verbreiteter. Man sagt, dass ein beschränktes Gebiet G einen **C^k-Rand** hat, wenn $\partial G = \bigcup_{i=1}^{N} F_i$, wobei F_i relativ offene Flächenstücke der Klasse C^k sind. Falls die Funktionen $x(t)$ aus Definition 1.1 zur Beschreibung der Flächenstücke F_i nur **Lipschitz stetig** sind, d.h. $|x(t) - x(s)| \le c\,|t - s|$ für alle $t, s \in T$, sagt man dass das Gebiet G einen **Lipschitz–Rand** hat.

- Insbesondere haben polygonale Gebiete keinen C^1-Rand, haben aber einen Lipschitz–Rand und sind Normalgebiete.

- Gebiete mit Lipschitz–Rand werden oft benutzt, da Lipschitz Funktionen fast überall differenzierbar sind und somit die Normale fast überall definiert ist.

- Das Oberflächenintegral wird für Gebiete mit C^k- oder Lipschitz–Rand mit Hilfe einer **Zerlegung der Eins** $(\psi_i)_{i=1,\ldots,N}$, wobei $\psi_i \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\sum_{i=1}^{N} \psi_i = 1$, $\operatorname{supp} \psi_i \subseteq F_i$, definiert durch

$$\int_{\partial G} f\, do = \sum_{i=1}^{N} \int_{F_i} f \psi_i\, do\,.$$

Wir sind nun in der Lage, den Gaußschen Integralsatz für Normalgebiete zu formulieren. Er besagt, dass das Volumenintegral über eine Divergenz,

$$\operatorname{div} f = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_j},$$

sich als Oberflächenintegral schreiben lässt. Für uns ist dies besonders wichtig, weil ja

$$\Delta u = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) = \operatorname{div} \nabla u$$

gilt.

1.3 Satz (Gaußscher Integralsatz). *Es sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Normalgebiet mit äußerer Normale ν. Ferner sei $f = (f_1, \ldots, f_n) \in C^0(\overline{G}, \mathbb{R}^n) \cap C^1(G, \mathbb{R}^n)$ und $\int\limits_G |\operatorname{div} f| dx < \infty$. Dann gilt:*

$$\int\limits_G \operatorname{div} f(x)\, dx = \int\limits_{\partial G} f(x) \cdot \nu(x)\, do(x). \tag{1.4}$$

Beweis. Der Beweis findet sich in [Sauvigny, S. 45] oder für Gebiete mit C^1-Rand und $f \in C^1(\overline{G}, \mathbb{R}^n)$ in [Ana III, S. 14.12]. □

Der Gaußsche Integralsatz ist die Verallgemeinerung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung. Er liefert eine Formel für die partielle Integration in höherer Raumdimension. Setzen wir in (1.4) die spezielle Funktion $f = (0, \ldots, 0, u, 0, \ldots, 0)$ mit u an der i–ten Stelle ein, so erhalten wir ein entsprechendes Resultat.

1.5 Folgerung. *Unter den Voraussetzungen von Satz 1.3 gilt für eine (skalare) Funktion $u \in C^0(\overline{G}) \cap C^1(G)$, mit $\int\limits_G |\frac{\partial u}{\partial x_i}|\, dx < \infty$:*

$$\int\limits_G \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\, dx = \int\limits_{\partial G} u(x)\nu_i(x)\, do(x).$$

Wenden wir den Gaußschen Integralsatz auf den Gradienten einer skalaren Funktion an, so erscheint der Laplace-Operator. Das führt zu den Greenschen Formeln, die wir im folgenden Satz notieren.

1.6 Satz (Greensche Formeln). *Es sei G ein Normalgebiet. Für $u, v \in C^1(\overline{G})$, $v \in C^2(G)$ und $\int\limits_G |\Delta v| dx < \infty$ gilt die erste Greensche Formel*

$$\int\limits_G u(x)\Delta v(x)\, dx = \int\limits_{\partial G} u(x)\frac{\partial v}{\partial \nu}(x)\, do(x) - \int\limits_G \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)\, dx. \tag{1.7}$$

Ist zusätzlich $u \in C^2(G)$ und $\int\limits_G |\Delta u| dx < \infty$, so gilt die zweite Greensche Formel

$$\int\limits_G u(x)\Delta v(x) - v(x)\Delta u(x)\ dx = \int\limits_{\partial G} u(x)\frac{\partial v}{\partial \nu}(x) - v(x)\frac{\partial u}{\partial \nu}(x)\ do(x). \tag{1.8}$$

Beweis. Die zweite Greensche Formel folgt offensichtlich sofort aus der ersten. Die erste Greensche Formel folgt aus dem Gaußschen Integralsatz, wenn wir ihn auf das Vektorfeld

$$f = \left(u\frac{\partial v}{\partial x_1}, \dots, u\frac{\partial v}{\partial x_n} \right) = u\nabla v$$

anwenden und beachten, dass gilt

$$\operatorname{div} f \;=\; \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(u\frac{\partial v}{\partial x_j} \right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_j} + u\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 v}{\partial x_j^2} = \nabla u \cdot \nabla v + u\Delta v.$$

Ausserdem ist aus der Analysis bekannt, dass die partielle Ableitung in Richtung des Normalenvektors,

$$\frac{\partial v}{\partial \nu} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_j}\nu_j,$$

als das euklidische Skalarprodukt aus dem Gradienten und dem Normalenvektor gegeben ist. □

1.2 Die Darstellungsformel

Die zweite Greensche Formel (1.8) verwenden wir, um eine Lösungsformel für das Randwertproblem für die Poissongleichung zu finden. Nehmen wir für den Moment an, dass $-\Delta u = f$ in G gilt und außerdem $u = g$ auf ∂G ist, wobei g und f bekannt sind. Dann liefert (1.8) unter geeigneten Voraussetzungen die Gleichung

$$\int_G u\Delta v - v\Delta u \; dx = \int_{\partial G} u\frac{\partial v}{\partial \nu} - v\frac{\partial u}{\partial \nu} \; do.$$

$$\int_G u\Delta v \; dx = -\int_G fv \; dx + \int_{\partial G} g\frac{\partial v}{\partial \nu} - v\frac{\partial u}{\partial \nu} \; do.$$

Wenn wir die Funktion v so wählen, dass sie auf dem Gebietsrand ∂G verschwindet, so haben wir fast eine Formel für „die Lösung“ u des Problems $-\Delta u = f$ in G, $u = g$ auf ∂G.

$$\int_G u\Delta v \; dx = -\int_G fv \; dx + \int_{\partial G} g\frac{\partial v}{\partial \nu} \; do.$$

Wir versuchen nun, ein v zu finden, dass für festes $x_0 \in G$ zusätzlich einer Bedingung der Art

$$„\int_G u\Delta v \; dx = u(x_0)“ \tag{2.1}$$

genügt. Das geht naturgemäß im allgemeinen nur mit einer Funktion v, die eine Singularität im Punkt x_0 besitzt.

2.2 Definition. *Eine Funktion u heißt in der offenen Menge $G \subset \mathbb{R}^n$* **harmonisch**, *wenn $u \in C^2(G)$ ist und $\Delta u = 0$ in G gilt.*

Wir suchen zunächst harmonische Funktionen, die von der Form

$$u(x) = v(|x|)$$

sind, also nur vom Abstand des Punktes x zum festen Ursprung abhängen. Sei $r := |x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$. Dann gilt für $x \neq 0$:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = v'(|x|)\frac{x_i}{|x|}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x) = v''(|x|)\frac{x_i^2}{|x|^2} + v'(|x|)\frac{1}{|x|}(1 - \frac{x_i^2}{|x|^2})$$

und damit

$$\Delta u(x) \;=\; v''(|x|) + v'(|x|)\frac{n-1}{|x|}. \tag{2.3}$$

Also ist $\Delta u = 0$ genau dann, wenn

$$v''(r) + \frac{n-1}{r}v'(r) = 0 \qquad (r \neq 0). \tag{2.4}$$

Wir lösen diese lineare gewöhnliche Differentialgleichung. Dazu setzen wir $w(r) := v'(r)$ und lösen

$$w'(r) + \frac{n-1}{r}w(r) = 0.$$

Diese Gleichung ist für $r > 0$ äquivalent zu

$$\left(r^{n-1}w(r)\right)' = 0,$$

also erhalten wir

$$v'(r) = w(r) = c_0 r^{1-n}$$

und damit in Abhängigkeit von der Raumdimension n als Lösungen von (2.4) mit beliebigen Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$$v(r) = c_1 r^{2-n} + c_2 \qquad (n \neq 2),$$
$$v(r) = c_1 \log r + c_2 \qquad (n = 2).$$

Damit haben wir folgendes Lemma bewiesen.

2.5 Lemma. *In* $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ *löst die* **Singularitätenfunktion**

$$s_n(x) = \begin{cases} \frac{-1}{2\pi} \log |x| & (n = 2) \\ \frac{1}{(n-2)\omega_n} |x|^{2-n} & (n \neq 2) \end{cases}$$

die Potentialgleichung $\Delta s_n = 0$*, ist also in* $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ *harmonisch.*

Wir werden im folgenden häufig mit Polarkoordinaten im $\mathbb{R}^n$ arbeiten. Dazu formulieren wir die Transformationsformel für Polarkoordinaten im $\mathbb{R}^n$. Der Beweis nutzt den allgemeinen Transformationsatz und die Zwiebelformel (vgl. [Ana III, S. 12.4, S. 13.23]).

2.6 Lemma. *Es sei* $B_R(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n | \, |x - x_0| < R\}$ *die Kugel um* x_0 *mit Radius* $R > 0$ *und* $S^{n-1} = \partial B_1(0)$ *die Einheitssphäre im* n*–dimensionalen Raum. Falls die auftretenden Integrale existieren, dann gilt*

$$\begin{aligned} \int\limits_{B_R(x_0)} f(x)\, dx &= \int\limits_0^R \Big(\int\limits_{S^{n-1}} f(x_0 + r\xi)\, do(\xi) \Big)\, r^{n-1}\, dr, \\ \int\limits_{\partial B_R(x_0)} f(x)\, do(x) &= \int\limits_{S^{n-1}} f(x_0 + R\xi)\, do(\xi) R^{n-1}. \end{aligned}$$

Wir konstruieren nun Funktionen der Art, wie wir sie zu Beginn dieses Abschnitts in (2.1) gewünscht hatten. Solche Funktionen nennen wir Grundlösungen. Sie sind aus der Singularitätenfunktion und einem glatten Anteil zusammengesetzt.

2.7 Definition. *Es sei* $\omega_n = |S^{n-1}|$ *der Flächeninhalt der Einheitssphäre im* $\mathbb{R}^n$ *und* $\omega_1 = 1$*. Eine Funktion*

$$\phi(y, x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \log |y - x| + \psi(y, x) & (n = 2) \\ \frac{1}{(n-2)\omega_n} |y - x|^{2-n} + \psi(y, x) & (n \neq 2) \end{cases} \qquad x \neq y$$

heißt **Grundlösung** *von* $\Delta u = 0$ *zum Gebiet* $G \subset \mathbb{R}^n$*, falls für festes* $x \in G$*,* $\psi(\cdot, x) \in C^1(\overline{G})$ *ist und* $\psi(\cdot, x)$ *in* G *harmonisch ist.*

Wir werden im folgenden eine solche Funktion immer Grundlösung nennen, ohne auf die zugehörige Differentialgleichung zu verweisen. Die Wahl der Konstanten in der Definition wird noch deutlich werden.

2.8 Satz. *Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Normalgebiet und sei $u \in C^2(\overline{G})$. Dann gilt für $x \in G$ die Darstellungsformel*

$$u(x) = \int\limits_{\partial G} \phi(y,x)\frac{\partial u}{\partial \nu}(y) - u(y)\frac{\partial \phi}{\partial \nu}(y,x)do(y) - \int\limits_{G} \phi(y,x)\Delta u(y)dy,$$

wobei ϕ eine beliebige Grundlösung (von $\Delta v = 0$ zu G) ist. ν bezeichnet die äußere Normale an ∂G im Punkt $y \in \partial G$.

Beweis. Wir beweisen die Darstellungsformel des Satzes für festes $x_0 \in G$ und $n \neq 2$. Dazu sei $\varepsilon > 0$ so klein, dass $\overline{B_\varepsilon(x_0)} \subset G$. Das Gebiet, aus dem diese kleine Kugel herausgebohrt ist, bezeichnen wir mit $G_\varepsilon := G \setminus \overline{B_\varepsilon(x_0)}$. Die zweite Greensche Formel (1.8) liefert unter den Voraussetzungen $u, v \in C^1(\overline{G}_\varepsilon)$, $u, v \in C^2(G_\varepsilon)$, $\int\limits_{G_\varepsilon} |\Delta u|\, dx < \infty$, $\int\limits_{G_\varepsilon} |\Delta v|\, dx < \infty$, dass gilt

$$\int\limits_{G_\varepsilon} u\Delta v - v\Delta u\, dx = \int\limits_{\partial G_\varepsilon} u\frac{\partial v}{\partial \nu} - v\frac{\partial u}{\partial \nu} do. \tag{$\star$}$$

Nach Voraussetzung ist $u \in C^2(\overline{G})$. Für v wählen wir $v(x) = \phi(x, x_0)$. Für $n \neq 2$ ist also

$$\phi(x,x_0) = \frac{1}{(n-2)w_n}|x-x_0|^{2-n} + \psi(x,x_0)$$

mit $\psi(\cdot, x_0) \in C^1(\overline{G}) \cap C^2(G)$. Also erfüllt auch $v = \phi(\cdot, x_0)$ obige Voraussetzungen. Nach ($\star$) gilt also

$$\begin{aligned}&\int\limits_{G_\varepsilon} u(x)\Delta\phi(x,x_0) - \phi(x,x_0)\Delta u(x)\, dx \\ &= \int\limits_{\partial G_\varepsilon} u(x)\frac{\partial \phi}{\partial \nu}(x,x_0) - \phi(x,x_0)\frac{\partial u}{\partial \nu}(x)do(x),\end{aligned}$$

und daraus folgt

$$\underbrace{-\int\limits_{G_\varepsilon} \phi(x,x_0)\Delta u(x)\, dx}_{(1)} + \underbrace{\int\limits_{\partial G} \phi(x,x_0)\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) - u(x)\frac{\partial \phi}{\partial \nu}(x,x_0)\, do(x)}_{(2)}$$

$$= \underbrace{\int\limits_{\partial B_\varepsilon(x_0)} \phi(x,x_0)\frac{\partial u}{\partial \nu}(x)}_{(3)} \underbrace{- u(x)\frac{\partial \phi}{\partial \nu}(x,x_0)\, do(x)}_{(4)}.$$

Jetzt wollen wir in den Termen $\varepsilon \to 0$ gehen lassen. Wir schrieben das Integral (1) als

$$\int\limits_{G_\varepsilon} \phi(x,x_0)\Delta u(x)\,dx = \int\limits_G \chi_{G_\varepsilon}(x)\phi(x,x_0)\Delta u(x)\,dx.$$

Da $u \in C^2(\overline{G})$ gilt, folgt $\Delta u \in L^\infty(G)$. Dies, die Darstellung

$$\phi(x,x_0) = c\,|x-x_0|^{2-n} + \psi(x,x_0)\,,$$

wobei $\psi(\cdot,x_0) \in C^1(\overline{G}) \hookrightarrow L^1(G)$, sowie

$$\int\limits_G |x-x_0|^{2-n}\,dx \le \int\limits_{B_R(x_0)\supseteq G} |x-x_0|^{2-n}\,dx = \omega_n \int\limits_0^R r^{2-n}r^{n-1}\,dr = c\,R^2 < \infty,$$

implizieren, dass $\phi\,\Delta u \in L^1(G)$. Da $|\chi_{G_\varepsilon}| \le 1$ folgt aus dem Satz von Lebesgue über dominierte Konvergenz

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{G_\varepsilon} \phi(x,x_0)\Delta u(x)\,dx = \int\limits_G \phi(x,x_0)\Delta u(x)\,dx.$$

Das Integral (2) existiert, da $x_0 \in G$ und $x \in \partial G$ ist. Das dritte Integral verschwindet für $\varepsilon \to 0$. Es ist nämlich

$$|(3)| = |\int\limits_{\partial B_\varepsilon(x_0)} \phi(x,x_0)\frac{\partial u}{\partial \nu}(x)\,do(x)| \le \max_{\overline{G}}|\nabla u| \int\limits_{\partial B_\varepsilon(x_0)} |\phi(x,x_0)|\,do(x)$$

und wegen

$$\int\limits_{\partial B_\varepsilon(x_0)} |x-x_0|^{2-n}\,do(x) = \int\limits_{S^{n-1}} \varepsilon^{2-n}\varepsilon^{n-1}\,do = \omega_n\varepsilon \ \to\ 0 \quad (\varepsilon\to 0)$$

folgt dann

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\partial B_\varepsilon(x_0)} \phi(x,x_0)\frac{\partial u}{\partial \nu}\,do(x) = 0.$$

Der reguläre Anteil ψ der Grundlösung ist dabei noch einfacher abzuschätzen.

Der eigentlich wichtige und von uns erwünschte Anteil ist im Integral (4) enthalten. Es sollte uns $-u(x_0)$ für $\varepsilon \to 0$ liefern.

$$\begin{aligned}(4) \ &= \int\limits_{\partial B_\varepsilon(x_0)} u(x)\frac{\partial \phi}{\partial \nu}(x,x_0)\,do(x)\\ &= \int\limits_{\partial B_\varepsilon(x_0)} u(x)\left\{\frac{1}{(n-2)\omega_n}\frac{\partial}{\partial\nu}\Big(|x-x_0|^{2-n}\Big) + \frac{\partial}{\partial\nu}\psi(x,x_0)\right\}\,do(x).\end{aligned}$$

Offensichtlich ist

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\partial B_\varepsilon(x_0)} u(x)\frac{\partial\psi}{\partial\nu}(x,x_0)\,do(x) = 0.$$

Wir berechnen den ersten Anteil von (4) explizit. Wir kennen die Normale, $\nu(x) = (x-x_0)/|x-x_0|$ und können demnach so rechnen:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\nu}\Big(|x-x_0|^{2-n}\Big) &= \sum_{i=1}^{n} \nu_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(|x-x_0|^{2-n}\Big)\\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i - x_{0i}}{|x-x_0|}(2-n)|x-x_0|^{1-n}\frac{x_i-x_{0i}}{|x-x_0|}\\
&= (2-n)|x-x_0|^{1-n}\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-x_{0i})^2}{|x-x_0|^2} = (2-n)|x-x_0|^{1-n}\\
&= (2-n)\varepsilon^{1-n} \qquad \text{für } x\in\partial B_\varepsilon(x_0).
\end{aligned}$$

Also folgt insgesamt, dass

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(n-2)\omega_n}\int\limits_{\partial B_\varepsilon(x_0)} u(x)\frac{\partial}{\partial\nu}\Big(|x-x_0|^{2-n}\Big)\,do(x)\\
&\qquad = -\frac{1}{\omega_n}\int\limits_{\partial B_\varepsilon(x_0)} u(x)\varepsilon^{1-n}\,do(x)\\
&\qquad = -\frac{1}{\omega_n}\int\limits_{S^{n-1}} u(x_0+\varepsilon\xi)\varepsilon^{1-n}\varepsilon^{n-1}\,do(\xi)\\
&\qquad = -\frac{1}{\omega_n}\int\limits_{S^{n-1}} u(x_0+\varepsilon\xi)\,do(\xi) \;\to\; -u(x_0) \quad (\varepsilon\to 0)
\end{aligned}$$

da u stetig ist. Wir fassen die Resultate für die Anteile (1), (2), (3) und (4) für $\varepsilon\to 0$ zusammen und erhalten damit wie behauptet die Darstellungsformel

$$-\int\limits_G \phi(x,x_0)\Delta u(x)\,dx + \int\limits_{\partial G} \phi(x,x_0)\frac{\partial u}{\partial\nu}(x) - u(x)\frac{\partial\phi}{\partial\nu}(x,x_0)\,do(x) = u(x_0).$$

□

2.9 Folgerung. *Sei $G\subseteq\mathbb{R}^n$ ein Normalgebiet und sei $u\in C^2(\overline{G})$ harmonisch in G. Dann gilt für $x\in G$*

$$u(x) = \int\limits_{\partial G} \phi(y,x)\frac{\partial u}{\partial\nu}(y) - u(y)\frac{\partial\phi}{\partial\nu}(y,x)\,do(y),$$

wobei ϕ eine beliebige Grundlösung ist.

Beweis. Setze in Satz 2.8 $\Delta u = 0$. □

2.10 Satz. *Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein beliebiges Gebiet und u eine harmonische Funktion in G. Dann ist $u \in C^\infty(G)$.*

Beweis. Sei $n > 2$. Zu jedem $x \in G$ existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass $\overline{B_\varepsilon(x)} \subseteq G$. Wir benutzen Folgerung 2.9 mit $G = B_\varepsilon(x)$ und $\phi(y,x) = s_n(y-x) = \frac{1}{(n-2)\omega_n}\frac{1}{|y-x|^{n-2}}$. Somit gilt für alle $y \in B_\varepsilon(x)$

$$u(y) = \frac{1}{(n-2)\omega_n} \int\limits_{\partial B_\varepsilon(x)} \frac{1}{|y-z|^{n-2}} \frac{\partial u}{\partial \nu}(z) - \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{|y-z|^{n-2}} u(z)\, do(z).$$

Betrachten wir nun die Menge $M := \{(y,z) \,\big|\, y \in \overline{B_{\frac{\varepsilon}{2}(x)}},\ z \in \partial B_\varepsilon(x)\}$. Für alle $(y,z) \in M$ gilt $|y-z| > \frac{\varepsilon}{2}$. Für $y \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x)$ sind somit alle Ableitungen des Integranden nach y stetig und der Satz über die Ableitung des Parameterintegrals aus Analysis III Satz 8.11 zeigt die Aussage. □

Satz (Differentiation unter dem Integralzeichen). Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und erfülle $f : U \times X \to \mathbb{R}$ die folgenden Bedingungen:

(i) es existiert eine Nullmenge $N \subseteq X$ so, dass für alle Punkte $x \in X \setminus N$ die Funktion $f(\cdot, x)$ stetig differenzierbar in U ist;

(ii) für alle $t \in U$ ist die Funktion $f(t, \cdot)$ μ-messbar;

(iii) es existiert eine Funktion $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ so, dass für alle $t \in U$ und für μ-fast-alle $x \in X$ und $i = 1, \ldots, n$
$$|\partial_i f(t,x)| \le g(x)\,.$$

Dann ist die Funktion $\phi(t) := \int_X f(t,x)\, d\mu(x)$ auf U stetig differenzierbar und es gilt für alle $t \in U$ und $i = 1, \ldots, n$

$$\partial_i \phi(t) = \int_X \partial_i f(t,x)\, d\mu(x)\,.$$

Satz 2.8 gibt uns die Möglichkeit eine Lösung des Randwertproblems

$$-\Delta u = f \quad \text{in } G, \qquad u = g \quad \text{auf } \partial G \tag{2.11}$$

zu gegebenen $f \in C^0(\overline{G})$, $g \in C^0(\partial G)$ zu finden. Wenn wir die Grundlösung ϕ so wählen, dass $\phi(y,x) = 0$ für $x \in G$ und $y \in \partial G$, so folgt:

$$u(x) = -\int\limits_G \phi(y,x) \Delta u(y)\, dy - \int\limits_{\partial G} u(y) \frac{\partial \phi}{\partial \nu}(y,x)\, do(y)\,,$$

d.h. wir haben eine Kandidatin für die Lösung von (2.11) gefunden, nämlich

$$u(x) = \int\limits_G \phi(y,x) f(y)\,dy - \int\limits_{\partial G} g(y) \frac{\partial \phi}{\partial \nu}(y,x)\,do(y), \tag{2.12}$$

falls ϕ eine Grundlösung mit den obigen Eigenschaften ist. Zwar wird es nicht ganz so einfach sein, denn die Stetigkeit von f reicht nicht aus, aber der Ansatz für eine Lösung ist richtig. Wir geben Grundlösungen mit den gewünschten Eigenschaften einen eigenen Namen.

2.13 Definition. *$\phi_G(y,x)$ ist eine zum Gebiet $G \subset \mathbb{R}^n$ gehörende* **Greensche Funktion***, wenn ϕ_G Grundlösung gemäß Definition 2.7 ist und außerdem der Bedingung $\phi_G(y,x) = 0$ für $y \in \partial G$, $x \in G$ genügt.*

1.3 Das Poissonintegral

Für geometrisch besonders einfache Gebiete lässt sich eine Greensche Funktion explizit angeben. Dies gilt z.B. für die Greensche Funktion einer Kugel $B_R(0)$ im $\mathbb{R}^n$.

3.1 Satz. *Eine Greensche Funktion der Kugel $B_R(0) \subset \mathbb{R}^n$ ist im Fall $n \neq 2$ gegeben durch*

$$\begin{aligned} \phi(y,x) &= \frac{1}{(n-2)w_n}\Big(|y-x|^{2-n} - \Big(\frac{R}{|x|}\Big)^{n-2}\Big|y - \frac{R^2}{|x|^2}x\Big|^{2-n}\Big) \quad (x \neq 0), \\ \phi(y,0) &= \frac{1}{(n-2)w_n}\Big(|y|^{2-n} - R^{2-n}\Big). \end{aligned}$$

In zwei Raumdimensionen ($n = 2$) ist eine Greensche Funktion für $B_R(0)$ durch

$$\begin{aligned} \phi(y,x) &= -\frac{1}{2\pi}\Big(\log\Big|y-x\Big| - \log\Big|\frac{|x|}{R}y - \frac{R}{|x|}x\Big|\Big) \quad (x \neq 0), \\ \phi(y,0) &= -\frac{1}{2\pi}\Big(\log|y| - \log R\Big) \end{aligned}$$

gegeben. In jedem Fall ist $\phi(y,x) = \phi(x,y)$.

Beweis. Wir betrachten nur den Fall $n \neq 2$. Offensichtlich hat ϕ die verlangte Form

$$\phi(y,x) = s_n(x-y) + \psi(y,x)$$

mit

$$\begin{aligned}
\psi(y,x) &= -\frac{1}{(n-2)w_n}\left(\frac{R}{|x|}\right)^{n-2}\left|y-\frac{R^2}{|x|^2}x\right|^{2-n} \quad (x\neq 0),\\
\psi(y,0) &= -\frac{1}{(n-2)w_n}R^{2-n}.
\end{aligned}$$

Für $x=0$ gilt $\psi(y,0)=$ konst., sowie $\phi(y,0)=0$ für $|y|=R$. Somit sind alle Bedingungen in Definition 2.13 erfüllt für $x=0$.

Die Formel von $\psi(y,x)$ basiert auf einer Spiegelung. Für $x\in B_R(0)\setminus\{0\}$ sucht man $x'=\alpha x$ so, dass

$$|x'|\,|x| = R^2, \quad \text{d.h. } \alpha=\frac{R^2}{|x|^2}.$$

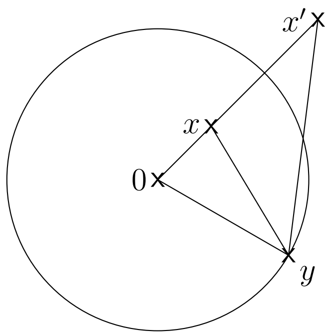
Dies entspricht einer Spiegelung an $\partial B_R(0)$. Somit gilt:

$$\psi(y,x) = -\frac{1}{(n-2)\omega_n}\left(\frac{R}{|x|}\right)^{n-2}|y-x'|^{2-n}\ .$$

Ist x fest, dann ist $\psi(y,x)=c(x,R)s_n(y-x')$. Aber nach einer Verschiebung und Lemma 2.5 ist $s_n(y-x')$ harmonisch in $\mathbb{R}^n\setminus\{x'\}$. Da $|x'|=\frac{R^2}{|x|}>R$ gilt, ist $s_n(y-x')$ harmonisch in $B_R(0)$. Weiterhin ist in allen $x\in B_R(0)\setminus\{0\}$

$$\psi(\cdot,x)\in C^2(\overline{B_R(0)}),$$

da $|y-x'|\geq|x'|-|y|\geq\frac{R^2}{|x|}-R>0$. Somit ist $\phi(\cdot,x)$ für festes x harmonisch. Es bleibt zu zeigen: $\phi(y,x)=0$ für $x\in B_R(0)\setminus\{0\}$ und $|y|=R$. Dabei hilft folgendes Bild:



Die Dreiecke durch die Punkte $0,x,y$ und $0,x',y$ sind ähnlich da

$$\begin{aligned}
&1)\ \measuredangle 0x,0y \;=\; \measuredangle 0x',0y\,,\\
&2)\ \frac{|0y|}{|0x'|}=\frac{|0x|}{|0y|}\Leftrightarrow |0y|^2=|0x|\,|0x'|\Leftrightarrow R^2=|x|\,|x'|\ .
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\frac{|0x|}{|xy|} = \frac{|0y|}{|x'y|} \Leftrightarrow \frac{|x|}{|x-y|} = \frac{|y|}{|x'-y|} = \frac{R}{|x'-y|} \Leftrightarrow \frac{1}{|x-y|} = \frac{R}{|x|}\frac{1}{|x'-y|},$$

d.h. $\psi(y,x) = -s_n(x-y)$. Somit folgt $\phi(y,x) = 0$ für alle $x \in B_R(0) \setminus \{0\}$ und $|y| = R$.

Für die Symmetrie von ϕ reicht es die Symmetrie von

$$\psi(y,x) = -\frac{1}{(n-2)\omega_n}\left(\frac{R}{|x|}\right)^{n-2} |y-x'|^{2-n}$$

zu zeigen. Im Nenner steht

$$|x|^{n-2}\,|y-x'|^{n-2} = \left(|x|^2\,|y-x'|^2\right)^{\frac{n-2}{2}}$$

und es gilt

$$\begin{aligned}|x|^2\left(|y|^2 - 2y\cdot x' + |x'|^2\right) &= |x|^2\,|y|^2 - 2y\cdot\left(\frac{R^2}{|x|^2}\,|x|^2\,x\right) + |x|^2\,|x'|^2\\ &= |x|^2\,|y|^2 - 2R^2\,y\cdot x + R^4.\end{aligned}$$

Somit ist die Symmetriebehauptung bewiesen. □

Wir vermuten nun, dass mit dieser Greenschen Funktion für die Kugel durch

$$u(x) = -\int_{\partial B_R(0)} g(y)\frac{\partial\phi}{\partial\nu}(y,x)\,do(y)$$

eine Lösung von $\Delta u = 0$ in $B_R(0)$ mit Randwerten $u = g$ auf $\partial B_R(0)$ gegeben ist. Dazu rechnen wir $\dfrac{\partial\phi}{\partial\nu(y)}(y,x)$ aus. Für $(n \geq 3)$ und $y \neq x$ ist:

$$\frac{\partial\phi}{\partial y_j}(y,x) = -\frac{1}{w_n}\left(\frac{y_j - x_j}{|y-x|^n} - \left(\frac{R}{|x|}\right)^{n-2}\frac{y_j - x'_j}{\left|y-x'\right|^n}\right).$$

Für $|y| = R$ folgt für die Ableitung in Richtung der Normalen $\nu = y/R$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\phi}{\partial\nu}(y,x) &= -\sum_{j=1}^{n}\frac{y_j}{R}\frac{1}{w_n}\left\{\frac{y_j-x_j}{|y-x|^n} - \left(\frac{R}{|x|}\right)^{n-2}\frac{y_j-x'_j}{\left|y-x'\right|^n}\right\}\\ &= -\frac{1}{R\,w_n}\left\{\frac{|y|^2 - x\cdot y}{|y-x|^n} - \left(\frac{R}{|x|}\right)^{n-2}\frac{|y|^2 - x'\cdot y}{\left|y-x'\right|^n}\right\}\end{aligned}$$

Da wie im Beweis des vorherigen Satzes

$$\frac{1}{|x-y|} = \frac{R}{|x|}\frac{1}{|x'-y|}$$

gilt, erhalten wir weiter

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\phi}{\partial\nu}(y,x) &= -\frac{1}{R\,w_n}\left\{\frac{R^2 - x\cdot y}{|y-x|^n} - \left(\frac{R}{|x|}\right)^{-2}\frac{R^2 - x'\cdot y}{|y-x|^n}\right\} \\
&= -\frac{1}{R\,w_n}\frac{R^2 - x\cdot y - \frac{|x|^2}{R^2}\Big(R^2 - x'\cdot y\Big)}{|y-x|^n} \\
&= -\frac{1}{R\,w_n}\frac{R^2-|x|^2}{|y-x|^n}.
\end{aligned}$$

Wir fassen diese Rechnungen im folgenden Satz zusammen.

3.2 Satz. *Sei $u \in C^0(\overline{B_R(0)}) \cap C^2(B_R(0))$ eine Lösung von*

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } B_R(0), \qquad u = g \quad \text{auf } \partial B_R(0).$$

Dann gilt für $x \in B_R(0)$ die Formel

$$u(x) = \frac{1}{Rw_n}\int\limits_{\partial B_R(0)} \frac{R^2-|x|^2}{|y-x|^n} g(y)\; do(y). \tag{3.3}$$

Beweis. Dies ist eine Konsequenz aus den obigen Rechnungen und Satz 2.8. Nur wurde in Satz 2.8 $u \in C^2(\overline{B_R(0)})$ vorausgesetzt. Jedenfalls ist nach der jetzigen Voraussetzung $u \in C^2(\overline{B_{R-\varepsilon}(0)})$ für jedes kleine positive ε. Also erhalten wir für $x \in B_{R-\varepsilon}(0)$

$$\begin{aligned}
u(x) &= \frac{1}{(R-\varepsilon)w_n}\int\limits_{\partial B_{R-\varepsilon}(0)} \frac{(R-\varepsilon)^2-|x|^2}{|y-x|^n} u(y)\, do(y) \\
&= \frac{1}{(R-\varepsilon)w_n}\int\limits_{S^{n-1}} \frac{(R-\varepsilon)^2-|x|^2}{|(R-\varepsilon)y-x|^n} u\big((R-\varepsilon)y\big)(R-\varepsilon)^{n-1}\, do(y).
\end{aligned}$$

Führe dann den Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ mit Hilfe des Satzes von Lebesgue über dominierte Konvergenz aus und erhalte die Behauptung des Satzes. $\square$

Eine wesentliche Konsequenz des obigen Satzes ist die, dass wir damit gezeigt haben, dass eine in der Kugel harmonische Funktion, die stetig bis zum Rand ist, vollständig durch ihre Randwerte festgelegt ist.

Bisher haben wir bewiesen, dass die Formel (3.3) notwendig für eine Lösung des Randwertproblems $u \in C^0(\overline{B_R(0)}) \cap C^2(B_R(0))$,

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } B_R(0), \qquad u = g \quad \text{auf } \partial B_R(0)$$

ist. Wir sind aber am umgekehrten Schluss interessiert. Das ist die Aussage des folgenden Satzes.

3.4 Satz (Poisson–Integral). *Sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $g \in C^0(\partial B_R(x_0))$. Dann ist durch*

$$u(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{Rw_n} \displaystyle\int\limits_{\partial B_R(x_0)} \dfrac{R^2 - |x - x_0|^2}{|y - x|^n} g(y) do(y) & (x \in B_R(x_0)) \\ g(x) & (x \in \partial B_R(x_0)) \end{cases}$$

die einzige Lösung $u \in C^0(\overline{B_R(x_0)}) \cap C^2(B_R(x_0))$ des Randwertproblems

$$\Delta u = 0 \ \ in \ \ B_R(x_0), \quad u = g \ \ auf \ \ \partial B_R(x_0)$$

gegeben. Die Funktion

$$P_R(x, y) := \frac{1}{Rw_n} \frac{|y|^2 - |x|^2}{|y - x|^n} \quad (x, y \in \mathbb{R}^n,\, x \neq y)$$

heißt **Poissonscher Integralkern**.

Beweis. Die Eindeutigkeit der Lösung folgt sofort aus der Darstellung und Satz 3.2.

OBdA dürfen wir $x_0 = 0$ wählen. Nach Definition ist

$$u(x) = \int\limits_{\partial B_R(0)} P_R(x, y)\, g(y)\, do(y) \quad (x \in B_R(0)).$$

Da $P_R(\cdot, y) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{y\})$ folgt aus dieser Formel und dem Satz über die Differentiation unter dem Integral dass $u \in C^2(B_R(0))$. Im Beweis von Satz 3.1 haben wir bewiesen, dass gilt

$$P_R(x, y) = -\frac{\partial \phi}{\partial \nu}(y, x) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \phi}{\partial y_i}(y, x)\nu_i \quad (|x| < R, |y| = R).$$

Daraus folgt nun sofort für festes $|y| = R$ und alle $|x| < R$, auf Grund der Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen und der Symmetrie von ϕ:

$$\Delta P_R(x,y) = -\Delta \frac{\partial \phi}{\partial \nu}(y,x) = -\frac{\partial}{\partial \nu}\Delta\phi(y,x) \overset{\text{Sym}}{=} -\frac{\partial}{\partial \nu}\Delta\phi(x,y) \overset{y \text{ fest}}{=} 0,$$

Wobei sich der Laplace Operator immer auf die x-Variable bezieht, d.h. $\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial^2_{x_i}}$. Mit dem Satz über die Differentiation unter dem Integral ergibt sich also $\Delta u(x) = 0$ für $x \in B_R(0)$. Zu zeigen bleibt, dass u bis zum Rand stetig ist, d.h. $u(x) \to g(x_*)$ $(x \to x_*,\ |x| < R,\ |x_*| = R)$. Dazu beobachten wir, dass die Funktion $\tilde{u}(x) = 1$ eine Lösung von $\Delta\tilde{u} = 0$ in $B_R(0)$, $\tilde{u} = 1$ auf $\partial B_R(0)$ ist. Also liefert uns Satz 3.2

$$1 = \int\limits_{\partial B_R(0)} P_R(x,y)\, do(y). \tag{3.5}$$

Wir zeigen nun für festes $|x_*| = R$:

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\ \big(|x| < R \wedge |x - x_*| < \delta\ \Rightarrow\ |u(x) - g(x_*)| < \varepsilon\big).$$

Sei nun also $|x - x_*| < \delta$, $|x| < R$, $|x_*| = R$. Es ist dann

$$\begin{aligned}
|u(x) - g(x_*)| &= \Big|\int\limits_{\partial B_R(0)} P_R(x,y) g(y)\, do(y) - g(x_*)\Big| \\
&\overset{(3.5)}{=} \Big|\int\limits_{\partial B_R(0)} P_R(x,y)\Big(g(y) - g(x_*)\Big)\, do(y)\Big| \\
&\leq \int\limits_{\partial B_R(0)} P_R(x,y)\Big|g(y) - g(x_*)\Big|\, do(y) \qquad (P_R > 0 \text{ für diese } x,y) \\
&= \int\limits_{\partial B_R(0) \cap \{y \in \mathbb{R}^n \,|\, |y - x_*| < 2\delta_1\}} P_R(x,y)|g(y) - g(x_*)|\, do(y) \\
&\qquad + \int\limits_{\partial B_R(0) \cap \{y \,|\, |y - x_*| \geq 2\delta_1\}} P_R(x,y)|g(y) - g(x_*)|\, do(y) \\
&\leq \max_{\substack{y \in \partial B_R(0) \\ |y - x_*| < 2\delta_1}} |g(y) - g(x_*)| \int\limits_{\partial B_R(0) \cap \{|y - x_*| < 2\delta_1\}} P_R(x,y)\, do(y) \\
&\qquad + 2 \max_{\partial B_R(0)} |g| \int\limits_{\partial B_R(0) \cap \{|y - x_*| \geq 2\delta_1\}} P_R(x,y)\, do(y).
\end{aligned}$$

Im Einzelnen kann man dann so weiter abschätzen:

$$\int\limits_{\partial B_R(0)\cap\{|y-x_*|<2\delta_1\}} P_R(x,y)\,do(y) \le \int\limits_{\partial B_R(0)} P_R(x,y)\,do(y) = 1,$$

für $\delta \le \delta_1$ gilt:

$$|y-x| \ge |y-x_*| - |x-x_*| \ge 2\delta_1 - \delta \ge \delta_1,$$

und somit

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\partial B_R(0)\cap\{|y-x_*|\ge 2\delta_1\}} P_R(x,y)\,do(y) &= \frac{1}{w_n R} \int\limits_{\partial B_R(0)\cap\{|y-x_*|\ge 2\delta_1\}} \frac{R^2-|x|^2}{|y-x|^n}\,do(y) \\
&\le \frac{1}{w_n R}\frac{R^2-|x|^2}{\delta_1^n} \int\limits_{\partial B_R(0)} do(y) \\
&= \frac{R^{n-2}(R^2-|x|^2)}{\delta_1^n}.
\end{aligned}$$

Damit folgt dann insgesamt:

$$|u(x)-g(x_*)| \;\le\; \max_{\substack{|y|=R\\ |y-x_*|<2\delta_1}} |g(y)-g(x_*)| + 2\max_{\partial B_R(0)} |g| \frac{R^{n-2}(R^2-|x|^2)}{\delta_1^n}$$

Dann folgt weiter

$$R^2-|x|^2 = (R-|x|)(R+|x|) = \;(|x_*|-|x|)(R+|x|) \le |x_*-x|2R < 2R\delta.$$

Zu $\varepsilon > 0$ wähle $\delta_1 > 0$ so klein, dass

$$\max_{\substack{|y|=R\\ |y-x_*|<2\delta_1}} |g(y)-g(x_*)| \;<\; \frac{\varepsilon}{2}$$

gilt (g ist gleichmäßig stetig auf $\partial B_R(0)$). Danach wähle $\delta \in (0,\delta_1]$ so klein, dass gilt

$$4\max_{\partial B_R(0)} |g| \frac{R^{n-1}\delta}{\delta_1^n} \;<\; \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dann folgt also $\quad |u(x)-g(x_*)| < \varepsilon \quad$ für $|x-x_*| < \delta$. □

Wir haben damit unsere erste partielle Differentialgleichung (durch eine Formel sogar) gelöst. Aber leider haben wir das nur für das spezielle Gebiet $G = B_R(x_0)$ geschafft. Um das Randwertproblem für die Poissongleichung auf allgemeineren Gebieten zu lösen, bräuchte man jetzt deren Greensche Funktion. Es gibt zu vielen Gebieten explizit bekannte Greensche Funktionen. Aber im Allgemeinen kann man lediglich - unter geeigneten Annahmen - die Existenz einer Greenschen Funktion nachweisen.

1.4 Das Maximumprinzip für harmonische Funktionen

4.1 Satz (Mittelwertgleichung). *Sei u in der offenen Menge $G \subset \mathbb{R}^n$ harmonisch. Dann gelten für jede Kugel $\overline{B_R(x_0)} \subset G$ die Mittelwertgleichungen*

$$u(x_0) = \frac{1}{w_n R^{n-1}} \int\limits_{\partial B_R(x_0)} u(y) do(y) = \frac{1}{|\partial B_R(x_0)|} \int\limits_{\partial B_R(x_0)} u(y) do(y) \tag{4.2}$$

und

$$u(x_0) = \frac{n}{w_n R^n} \int\limits_{B_R(x_0)} u(y) dy = \frac{1}{|B_R(x_0)|} \int\limits_{B_R(x_0)} u(y) dy. \tag{4.3}$$

Beweis. Nach Satz 3.4 wissen wir, da $|x_0 - y| = R$, dass

$$u(x_0) = \frac{1}{w_n R} \int\limits_{\partial B_R(x_0)} \frac{R^2}{|y - x_0|^n} u(y)\, do(y) = \frac{1}{w_n R^{n-1}} \int\limits_{\partial B_R(x_0)} u(y)\, do(y).$$

Dies gilt aber nicht nur für dieses R sondern für alle $r \in (0, R]$ und somit ist

$$u(x_0) = \frac{1}{w_n r^{n-1}} \int\limits_{\partial B_r(x_0)} u(y)\, do(y) \ = \frac{1}{w_n} \int\limits_{S^{n-1}} u(x_0 + r\xi)\, do(\xi)\,.$$

Multiplizieren wir diese Gleichung mit r^{n-1} und integrieren dann bezüglich r von 0 bis R, so erhalten wir

$$\int\limits_0^R r^{n-1} u(x_0)\, dr = \frac{1}{w_n} \int\limits_0^R \int\limits_{S^{n-1}} u(x_0 + r\xi) r^{n-1} do(\xi)\, dr$$

und demnach folgt

$$\frac{1}{n} R^n u(x_0) = \frac{1}{w_n} \int\limits_{B_R(x_0)} u(y)\, dy.$$

□

4.4 Satz (Umgekehrter Mittelwertsatz). *Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $u \in C^2(G)$. Falls für jeden Ball $B_R(x)$ mit $\overline{B_R(x)} \subseteq G$ die Mittelwerteigenschaft (4.3) gilt, dann ist u harmonisch in G.*

Beweis. Angenommen die Behauptung ist falsch. Dann existiert $x \in G$ und $\varepsilon > 0$, so dass $\overline{B_\varepsilon(x)} \subseteq G$ und O.B.d.A $\Delta u > 0$ auf $\overline{B_\varepsilon(x)}$. Zu $0 < s \leq \varepsilon$ definieren wir

$$\Phi(s) := \frac{1}{\omega_n} \int_{S^{n-1}} u(x + s\xi)\, do(\xi).$$

Multiplizieren wir diese Gleichung mit s^{n-1} und integrieren dann bezüglich s von 0 bis r, mit $r \in (0, \varepsilon)$, so erhalten wir

$$\int_0^r s^{n-1} \Phi(s)\, ds = \frac{1}{\omega_n} \int_{B_r(x)} u(y)\, dy,$$

woraus, aufgrund der vorausgesetzten Mittelwertgleichung (4.3), folgt

$$\frac{n}{r^n} \int_0^r s^{n-1} \Phi(s)\, ds = u(x)$$

für $0 < r \leq \varepsilon$. Da die rechte Seite nicht von r abhängt, verschwindet die Ableitung der linken Seite nach r und es folgt

$$0 = -\frac{n^2}{r^{n+1}} \int_0^r s^{n-1} \Phi(s)\, ds + \frac{n}{r^n} r^{n-1} \Phi(r) = -\frac{n}{r} u(x) + \frac{n}{r} \Phi(r),$$

was unmittelbar $u(x) = \Phi(r)$ impliziert. Φ ist also konstant und aus Lemma 2.6 und dem Satz von Gauß folgt

$$\begin{aligned} 0 = \Phi'(r) &= \frac{1}{\omega_n} \int_{S^{n-1}} \nabla u(x + r\xi) \cdot \xi\, do(\xi) = \frac{1}{r^{n-1}\omega_n} \int_{\partial B_r(x)} \nabla u(y) \cdot \nu\, dy \\ &= \frac{1}{r^{n-1}\omega_n} \int_{B_r(x)} \Delta u(y)\, dy > 0 \end{aligned}$$

ein Widerspruch. □

Man kann zeigen, dass Satz 4.4 schon für $u \in C(G)$ gilt.

4.5 Satz (Liouville). *Sei u auf $\mathbb{R}^n$ definiert und sei u harmonisch in jedem beschränkten Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}^n$. Falls u von unten beschränkt ist, so ist u konstant.*

Beweis. Da u nach unten beschränkt ist, existiert $m \in \mathbb{R}$, so dass $m \leq u(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt. OBdA ist $m > 0$, sonst betrachte $u + m + 1$. Sei nun $x \in \mathbb{R}^n$ fest. Dann existiert $R > 0$. so dass $x \in B_R(0)$. Nach Satz 3.2 gilt

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial B_R(0)} u(y) \frac{R^2 - |x|^2}{R\,|x - y|^n}\, do(y). \tag{4.6}$$

Für $|y| = R$ gilt

$$R - |x| = |y| - |x| \leq |x - y| \leq |x| + R.$$

Benutzten wir nun diese beiden Abschätzungen von $|x - y|$ in (4.6) folgt

$$\begin{aligned} u(x) &\geq \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial B_R(0)} u(y)\, do(y)\, \frac{(R - |x|)(R + |x|)}{R(R + |x|)^n}, \\ u(x) &\leq \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial B_R(0)} u(y)\, do(y)\, \frac{(R - |x|)(R + |x|)}{R(R - |x|)^n}. \end{aligned}$$

Andererseits ist nach dem Mittelwertsatz 4.1

$$u(0) = \frac{1}{\omega_n R^{n-1}} \int_{\partial B_R(0)} u(y)\, do(y).$$

Insgesamt erhalten wir also

$$\frac{(R - |x|)R^{n-2}}{(R + |x|)^{n-1}} u(0) \leq u(x) \leq u(0) \frac{(R + |x|)R^{n-2}}{(R - |x|)^{n-1}}.$$

Diese Ungleichung wird **Harnacksche Ungleichung** genannt. Mit $R \to \infty$ folgt

$$u(0) \leq u(x) \leq u(0)\,,$$

d.h. $u(x) = u(0)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und also ist u konstant. □

4.7 Satz (Starkes Maximumprinzip). *Es sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und es sei u in G harmonisch. Gibt es einen Punkt $x_0 \in G$, so dass*

$$u(x_0) = \inf_{x \in G} u(x) \quad \textit{oder} \quad u(x_0) = \sup_{x \in G} u(x),$$

so ist u in G konstant.

Beweis. Es sei $x_1 \in G$, $x_1 \neq x_0$ beliebig. Nach Voraussetzung ist G ein Gebiet, also (wegweise) zusammenhängend, d.h. es gibt eine Funktion φ mit den Eigenschaften

$$\varphi : [0, 1] \to G,\ \varphi(0) = x_0,\ \varphi(1) = x_1,\ \varphi \in C^0([0, 1]).$$

Definiere $M := u(x_0) = \inf_G u$ und setze

$$I := \{s \in [0, 1] \mid u(\varphi(t)) = M\ \forall t \in [0, s]\}.$$

Wir zeigen nun, dass $I = [0,1]$ ist. Daraus folgt dann insbesondere, dass $u(x_1) = u(x_0) = M$ ist, und da $x_1 \in G$ beliebig war, erhalten wir, dass u in G konstant ist.

I ist nicht die leere Menge, denn nach Voraussetzung ist $0 \in I$. I ist abgeschlossen, weil u stetig ist. Also gibt es ein maximales $s_* \in [0,1]$, so dass $I = [0, s_*]$. Wir nehmen an, dass $s_* < 1$ ist und setzen $x_* := \varphi(s_*)$. Da $\varphi(s_*) \in G$ und G offen ist, gibt es ein $R > 0$ mit $\overline{B_R(x_*)} \subset G$. Die Funktion $v(x) := u(x) - M$ ist harmonisch in G und ausserdem nicht negativ. Dann folgt aber

$$0 = |B_R(x_*)| v(x_*) = \int_{B_R(x_*)} \underbrace{v(x)}_{\geq 0}\, dx,$$

und dies impliziert

$$v(x) = 0 \quad \forall x \in B_R(x_*).$$

Das ist ein Widerspruch zur Maximalität von s_*. □

4.8 Folgerung (Schwaches Maximumprinzip). *Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. Ist $u \in C^0(\overline{G})$ in G harmonisch, so hat man*

$$\min_{\overline{G}} u = \min_{\partial G} u \quad \textit{und} \quad \max_{\overline{G}} u = \max_{\partial G} u.$$

Beweis. Für den ersten Fall. Die Menge $\overline{G}$ ist kompakt, also wird ein Minimum von u in $\overline{G}$ angenommen, da $u \in C^0(\overline{G})$. Falls $u(x_0) = \min_{\overline{G}} u$ und $x_0 \in G$ ist, dann ist u nach dem starken Maximumprinzip konstant, also auch $\min_{\overline{G}} u = \min_{\partial G} u$. Liegt x_0 auf dem Rand von G, so ist die Aussage sowieso wahr. □

Bemerkung. Diese Aussage ist für unbeschränkte Gebiete im allgemeinen falsch! Dies sieht man an dem einfachen Beispiel $G := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 < 0\}$ und $u(x) := -x_2$.

Aus dem schwachen Maximumprinzip können wir leicht folgern, dass das Randwertproblem für die Poissongleichung höchstens eine Lösung hat.

4.9 Folgerung. *Für ein beschränktes Gebiet $G \subset \mathbb{R}^n$ hat das Randwertproblem $u \in C^0(\overline{G}) \cap C^2(G)$, $-\Delta u = f$ in G, $u = g$ auf ∂G höchstens eine Lösung.*

Beweis. Seien $u_i \in C^0(\overline{G}) \cap C^2(G)$, $i = 1, 2$, Lösungen von $-\Delta u_i = f$ in G, $u_i = g$ auf ∂G. Die Differenz $w := u_1 - u_2 \in C^0(\overline{G}) \cap C^2(G)$ erfüllt dann $-\Delta w = 0$ in G, $w = 0$ auf ∂G. Aus Folgerung 4.8 folgt sofort $w = 0$ in G und somit $u_1 = u_2$ in G. □

Beispiel. Es gibt beschränkte Gebiete G, für die das Randwertproblem,

$$u \in C^0(\overline{G}) \cap C^2(G), \qquad -\Delta u = 0 \text{ in } G, \qquad u = g \text{ auf } \partial G,$$

zu vorgegebenen Randwerten $g \in C^0(\partial G)$ unlösbar ist. Wähle als Gebiet $G := \{x \in \mathbb{R}^n \mid 0 < |x| < R\}$, $n \geq 3$. Dann ist der Rand von G durch $\partial G = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = R\} \cup \{0\}$ gegeben. Geben wir nun die Randwerte

$$g(x) := \begin{cases} 1 & (|x| = R) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

vor, dann ist $g \in C^0(\partial G)$, aber das Randwertproblem hat keine Lösung.

Angenommen es existiert $u \in C(\overline{G}) \cap C^2(G)$ harmonisch mit den Randwerten g. Nach [Sauvigny, Partial Differential Equations 1 S.333ff] ist u harmonisch in $B_R(0)$. Nach dem Mittelwertsatz 4.1 gilt für alle $0 < r < R$

$$0 = u(0) = \frac{1}{\omega_n r^n} \int\limits_{B_r(0)} u(y)\, do$$

und nach Folgerung 4.8 gilt $0 \leq u \leq 1$. Somit gilt $u = 0$ in $B_r(0)$ für alle $0 < r < R$ und somit auch $u = 0$ in $\overline{B_R(0)}$ im Widerspruch zu $u = 1$ auf $\partial B_R(0)$.

Der potentielle Kandidat $u(x) = |x|$ im Falle $R = 1$ ist nicht harmonisch, da $\Delta u = (n-1)\,|x|^{-1} > 0$ für $n \geq 2$. Für $n = 1$ ist der punktierte Ball kein Gebiet.

1.5 Das Newtonpotential

Unser Ziel ist immer noch die Lösung des Randwertproblems

$$-\Delta u = f \text{ in } G, \qquad u = g \text{ auf } \partial G$$

Wir hatten uns bereits auf Grundlage von Satz 2.8 überlegt, dass

$$u(x) = \int\limits_G \phi(y,x) f(y)\, dy - \int\limits_{\partial G} g(y) \frac{\partial \phi}{\partial \nu}(y,x)\, do(y), \tag{5.1}$$

wobei ϕ eine Greensche Funktion ist, eine Kandidatin für die Lösung ist. In Abschnitt 1.3 haben wir für die Kugel $B_R(x_0)$ gezeigt, dass durch

$$u(x) = -\int\limits_{\partial G} g(y) \frac{\partial \phi}{\partial \nu}(y,x)\, do(y),$$

wobei ϕ die Greensche Funktion ist, die einzige Lösung von

$$-\Delta u = 0 \ \text{ in } G, \qquad u = g \ \text{ auf } \partial G$$

gegeben ist. Aufgrund der Linearität des Laplace Operators sowie (5.1) erwarten wir, dass das Volumenintegral in (5.1) eine Lösung von

$$-\Delta u = f \ \text{ in } G, \qquad u = 0 \ \text{ auf } \partial G$$

ist. Wir gehen aber etwas anders vor, indem wir zunächst nur die Singularitätenfunktion im Volumenintegral untersuchen.

5.2 Definition (Newtonpotential). *Es sei f auf $G \subset \mathbb{R}^n$ integrierbar. Dann heißt*

$$w(x) := \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_G \log|x-y| f(y)\, dy & (n = 2) \\ \dfrac{1}{\omega_n (n-2)} \displaystyle\int_G |x-y|^{2-n} f(y)\, dy & (n \neq 2) \end{cases}, \ x \in \mathbb{R}^n$$

Newtonpotential *von f.*

Wir vermuten, dass unter geeigneten Voraussetzungen $-\Delta w = f$ in G gilt.

5.3 Satz. *Sei G ein beschränktes Gebiet und sei $f \in L^\infty(G)$, so ist das Newtonpotential $w \in C^1(\mathbb{R}^n)$ und*

$$\frac{\partial w}{\partial x_i}(x) = \frac{-1}{\omega_n} \int_G \frac{x_i - y_i}{|x-y|^n} f(y)\, dy \quad (x \in \mathbb{R}^n) \ \ (i = 1, \ldots, n).$$

Beweis. Sei $n > 2$, $x \in \mathbb{R}^n$ und $G \subseteq B_R(x)$ für $R > 0$. Dann ist

$$\begin{aligned} |w(x)| &\leq \frac{c}{\omega_n} \int_G |x-y|^{2-n}\, dy \leq \frac{c}{\omega_n} \int_{B_R(x)} |x-y|^{2-n}\, dy \\ &= \frac{c}{\omega_n} \int_0^R \int_{S^{n-1}} r^{2-n} r^{n-1}\, do\, dr = \frac{c}{\omega_n} \int_0^R \omega_n r\, dr = \frac{c}{2} R^2 \end{aligned}$$

mit $c = \frac{\|f\|_{L^\infty(G)}}{(n-2)}$. Somit ist w wohldefiniert. Definiere für $i = 1, \ldots, n$ und $x \in \mathbb{R}^n$

$$v_i(x) := \frac{-1}{\omega_n} \int_G \frac{(x-y)_i}{|x-y|^n} f(y)\, dy.$$

Eine analoge Rechnung liefert für $v = (v_1, \ldots, v_n)^\top$:

$$|v(x)| \leq c \int_0^R \int_{S^{n-1}} r^{1-n} r^{n-1} \, do \, dr \leq c\, R.$$

Zu zeigen ist $v = \nabla w$. Sei $\eta \in C^1(\mathbb{R})$ mit $0 \leq \eta \leq 1$, $0 \leq |\eta'| \leq 2$, $\eta = 0$ in $[-1, 1]$ und $\eta(t) = 1$ für $|t| \geq 2$. Definiere $\eta_\varepsilon(t) := \eta(\frac{t}{\varepsilon})$. Dann gilt

$$\eta_\varepsilon(t) = 0 \quad t \in [-\varepsilon, \varepsilon], \qquad \eta_\varepsilon(t) = 1 \quad |t| \geq 2\varepsilon,$$
$$|\eta_\varepsilon'(t)| = \left|\eta'(\tfrac{t}{\varepsilon})\,\tfrac{1}{\varepsilon}\right| \leq \tfrac{2}{\varepsilon}.$$

Definiere nun

$$w_\varepsilon(x) := \int_G s_n(x-y) f(y)\, \eta_\varepsilon(|x-y|)\, dy.$$

Mit dieser Definition wird die Singularität $x = y$ herausgeschnitten. Nach dem Satz über die Differentiation unter dem Integral ist $w_\varepsilon \in C^1(\mathbb{R}^n)$, denn $x \mapsto s_n(x)\eta_\varepsilon(x)$ ist $C^1(\mathbb{R}^n)$ und $c\, \|f\|_\infty$ ist eine Majorante für die Ableitung. Es gilt

$$\begin{aligned}\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x_i}(x) = \int_G & \frac{-1}{\omega_n} \frac{(x-y)_i}{|x-y|^n}\, \eta_\varepsilon(|x-y|) f(y) \\ & + s_n(x-y)\eta_\varepsilon'\big(\,|x-y|\,\big) \frac{(x-y)_i}{|x-y|} f(y)\, dy.\end{aligned}$$

Weiterhin gilt $w_\varepsilon \rightrightarrows w$ in $\mathbb{R}^n$, da

$$\begin{aligned}|w(x) - w_\varepsilon(x)| &= \left| \int_G s_n(x-y) f(y) \big(1 - \eta_\varepsilon(|x-y|\,\big)\, dy \right| \\ &\leq \int_{|x-y| \leq 2\varepsilon} s_n(x-y)\, |f(y)|\, dy \leq c\, \|f\|_\infty \, \varepsilon^2.\end{aligned}$$

Somit ist w stetig. Für den Gradienten gilt $\nabla w_\varepsilon \rightrightarrows v$ in $\mathbb{R}^n$, da

$$\begin{aligned}|v(x) - \nabla w_\varepsilon(x)| &\leq \int_G \frac{1}{\omega_n} \frac{|x-y|}{|x-y|^n} \big(1 - \eta_\varepsilon(|x-y|)\big)\, |f(y)| \\ &\qquad + s_n(x-y)\eta_\varepsilon'\big(\,|x-y|\,\big)\, |f(y)|\, dy \\ &\leq c\, \|f\|_\infty \int_{|x-y| \leq 2\varepsilon} |x-y|^{1-n} + \frac{2}{\varepsilon}\, |x-y|^{2-n}\, dy\end{aligned}$$

$$\leq c \|f\|_\infty (\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon}) \leq c\,\varepsilon.$$

Also ist auch $v \in C^0(\mathbb{R}^n)$ und $\nabla w = v$ folgt mit einem bekannten Satz aus Analysis I. □

Leider ist unter den Voraussetzungen des vorigen Satzes w nicht in $C^2(G)$. Dazu müssen wir mehr an f voraussetzen. f muss nicht nur stetig, sondern hölderstetig sein. Die Hölderstetigkeit ist eine Eigenschaft, die zwischen der Stetigkeit und der Differenzierbarkeit einer Funktion angesiedelt ist.

5.4 Definition (Hölderstetigkeit). *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$. Dann heißt u in M* **hölderstetig mit** *Hölderexponent $\alpha \in (0, 1]$, wenn*

$$\forall K \subset M, K \text{ kompakt, } \exists\, c \quad \forall x_1, x_2 \in K : |u(x_1) - u(x_2)| \leq c\,|x_1 - x_2|^\alpha.$$

Im Fall $\alpha = 1$ spricht man auch von **Lipschitzstetigkeit**. *Die Menge der in M hölderstetigen Funktionen bezeichnen wir mit*

$$C^{0,\alpha}(M) = \{v : M \to \mathbb{R} \;\Big|\; v \text{ ist in } M \text{ hölderstetig mit Exponent } \alpha\}.$$

Beispiel. Die Funktion $v(x) = |x|^\alpha (x \in \mathbb{R}^n)$ liegt in $C^{0,\alpha'}(\mathbb{R}^n)$ für alle $\alpha' \in (0, \alpha]$.

Nun sind wir in der Lage, die zweiten Ableitungen des Newtonpotentials zu berechnen.

5.5 Satz. *Für ein beschränktes Gebiet $G \subset \mathbb{R}^n$ sei $f \in C^{0,\alpha}(G)$ und außerdem $\sup_G |f| < \infty$. Dann ist $w \in C^2(G)$, und die zweiten partiellen Ableitungen von w sind hölderstetig mit Exponent α in G und sind gegeben durch*

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{-1}{w_n} \int\limits_{G_0} \Big(\delta_{ij} - n \frac{x_i - y_i}{|x-y|} \frac{x_j - y_j}{|x-y|}\Big) \frac{f(y) - f(x)}{|y-x|^n}\, dy \\ + \frac{1}{w_n} \int\limits_{\partial G_0} \frac{x_i - y_i}{|x-y|^n} \nu_j(y)\, do(y)\, f(x) \qquad (x \in G) \qquad (5.6)\end{aligned}$$

$(i, j = 1, \ldots, n)$ für jedes Normalgebiet $G_0 \supseteq \overline{G}$. Hierbei setzen wir $f(y) = 0$ für $(y \in G_0 \setminus G)$. Außerdem gilt

$$-\Delta w = f \qquad \text{in } G. \qquad (5.7)$$

Beweis. Wir zeigen für $n > 2$, dass $w \in C^2(G)$. Der Beweis von $w \in C^{2,\alpha}(G)$ findet man in Gilbarg-Trudinger. Wir wählen ein Normalgebiet G_0 mit $\overline{G} \subseteq G_0$ und definieren für $x \in G$

$$\begin{aligned} u_{i,j}(x) &:= \text{rechte Seite von (5.6)} \\ &= \int_{G_0} \partial_{y_j}\partial_{y_i} s_n(x-y)\big(f(y)-f(x)\big)\,dy + \int_{\partial G_0} \partial_{y_i} s_n(x-y)\,\nu_j\,do(y) f(x). \end{aligned}$$

Wir zeigen zuerst, dass $u_{i,j}$ wohldefiniert ist. Zu $x \in G$ existiert $R > 0$, so dass $B_R(x) \subseteq G$. Dann folgt

$$\begin{aligned} |u_{i,j}(x)| \le c \int_{B_R(x)} \frac{|f(y)-f(x)|}{|x-y|^n}\,dy &+ c \int_{G_0\setminus B_R(x)} \frac{|f(y)-f(x)|}{|x-y|^n}\,dy \\ &+ c \int_{\partial G_0} |x-y|^{1-n}\,do(y)\,|f(x)| \\ &=: \mathbf{I} + \mathbf{II} + \mathbf{III}. \end{aligned}$$

Zu **I**: Da f hölderstetig ist, gilt

$$\frac{|f(y)-f(x)|}{|x-y|^n} \le c\,\frac{|x-y|^\alpha}{|x-y|^n} = c\,|x-y|^{\alpha-n}\,.$$

Somit folgt, analog zum Beweis von Satz 5.3,

$$\int_{B_R(x)} \frac{|f(y)-f(x)|}{|x-y|^n}\,dy \le c\int_0^R r^{\alpha-n} r^{n-1}\,dr \le c\,R^\alpha.$$

Zu **II**: Auf $G_0 \setminus B_R(x)$ gilt $|x-y| \ge R$ und somit

$$\mathbf{II} \le \int_{G_0\setminus B_R(x)} 2\,\|f\|_\infty\,R^{-n}\,dy < \infty.$$

Zu **III**: Wegen $\overline{G} \subseteq G_0$ gilt $|x-y| > \delta$ für alle $y \in \partial G_0$ und somit folgt

$$\mathbf{III} \le \int_{\partial G_0} \delta^{1-n}\,do(y)\,|f(x)| < \infty.$$

Also ist u_{ij} wohldefiniert.

Wir setzen $v_i := \partial_i w$, wobei w das Newtonpotential ist. Weiter definieren wir für $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}(v_\varepsilon)_i(x) &:= \frac{-1}{\omega_n} \int\limits_{G_0} \frac{(x-y)_i}{|x-y|^n}\, \eta_\varepsilon(|x-y|) f(y)\, dy \\ &= -\int_{G_0} \partial_{y_i} s_n(x-y)\, \eta_\varepsilon(|x-y|) f(y)\, dy,\end{aligned}$$

wobei η im Beweis von Satz 5.3 definiert ist. Wie im dortigen Beweis wird die Singularität herausgeschnitten und somit gilt $v_\varepsilon \in C^1(G)$. Nach dem Satz über die Differentiation unter dem Integral erhalten wir

$$\begin{aligned}\frac{\partial (v_\varepsilon)_i}{\partial x_j}(x) &= -\int\limits_{G_0} \partial_{x_j}\big(\partial_{y_i} s_n(x-y)\, \eta_\varepsilon(|x-y|)\big) f(y)\, dy \\ &= \int\limits_{G_0} \partial_{y_j}\big(\partial_{y_i} s_n(x-y)\, \eta_\varepsilon(|x-y|)\big)\big(f(y)-f(x)\big)\, dy \\ &\qquad + \int\limits_{G_0} \partial_{y_j}\big(\partial_{y_i} s_n(x-y)\, \eta_\varepsilon(|x-y|)\big)\, dy\, f(x) \\ &= \int\limits_{G_0} \partial_{y_j}\big(\partial_{y_i} s_n(x-y)\eta_\varepsilon(|x-y|)\big)\big(f(y)-f(x)\big)\, dy \\ &\qquad + f(x) \int\limits_{\partial G_0} \partial_{y_i} s_n(x-y)\, \eta_\varepsilon(|x-y|)\, \nu_j(y)\, do(y),\end{aligned}$$

wobei wir $\partial_{x_i} g(x-y) = -\partial_{y_i} g(x-y)$ und den Satz von Gauß benutzt haben. Sei $K \subseteq\subseteq G$ und sei $2\varepsilon < \operatorname{dist}(K, \partial G)$. Dann gilt $\eta_\varepsilon(|x-y|) = 1$ für alle $x \in K$ und alle $y \in \partial G_0$. Daraus folgt für solche ε und alle $x \in K$

$$\begin{aligned}&|u_{i,j}(x) - \frac{\partial (v_\varepsilon)_i}{\partial x_j}(x)| \\ &\quad = \Big| \int\limits_{G_0} \partial_{y_j}\partial_{y_i} s_n(x-y)\big(1-\eta_\varepsilon(|x-y|)\big)(f(y)-f(x)) \\ &\qquad\quad - \partial_{y_i} s_n(x-y)\, \eta'(\tfrac{|x-y|}{\varepsilon}) \frac{(x-y)_j}{\varepsilon\, |x-y|}(f(y)-f(x))\, dy \Big| \\ &\quad \le c \int\limits_{\underbrace{|x-y|<2\varepsilon}_{\subset G}} |x-y|^{-n}\, |f(y)-f(x)| + 2\frac{|x-y|^{1-n}}{\varepsilon}\, |f(y)-f(x)|\, dy\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq c(f) \int\limits_{|x-y|<2\varepsilon} \left(|x-y|^{-n} + \frac{|x-y|^{1-n}}{\varepsilon} \right) |x-y|^{\alpha}\, dy \\
&\leq c \int\limits_0^{2\varepsilon} \int\limits_{S^{n-1}} r^{-n+\alpha} r^{n-1} + \frac{1}{\varepsilon} r^{1-n} r^{\alpha} r^{n-1}\, do(y)\, dr \\
&\leq c \left(\varepsilon^{\alpha} + \frac{1}{\varepsilon} \varepsilon^{1+\alpha} \right) = c\, \varepsilon^{\alpha}.
\end{aligned}
$$

Somit gilt $\partial_j (v_\varepsilon)_i \rightrightarrows u_{i,j}$ in K für $\varepsilon \to 0$, aber aus dem Beweis von Satz 5.3 wissen wir bereits $(v_\varepsilon)_i \rightrightarrows v_i = \partial_i w$ in G. Somit gilt $u_{i,j} = \partial_i \partial_j w$ in K. Da $K \subseteq\subseteq G$ beliebig war erhalten wir, dass $w \in C^2(G)$.

Wir müssen noch zeigen, dass aus der Formel (5.6) für die zweiten partiellen Ableitungen von w die Differentialgleichung (5.7) folgt. Aus (5.6) folgt sofort:

$$
\begin{aligned}
-\Delta w(x) &= \frac{1}{w_n} \int\limits_{G_0} \sum_{i=1}^{n} \left(1 - n \frac{(x_i - y_i)^2}{|x-y|^2} \right) \frac{f(y) - f(x)}{|y-x|^n}\, dy \\
&\qquad - \frac{1}{w_n} \int\limits_{\partial G_0} \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i - y_i}{|x-y|^n} \nu_i(y)\, do(y)\, f(x) \\
&= \frac{1}{w_n} \int\limits_{G_0} \left(n - n \frac{|x-y|^2}{|x-y|^2} \right) \frac{f(y) - f(x)}{|x-y|^n}\, dy \\
&\qquad - \frac{1}{w_n} \int\limits_{\partial G_0} \frac{x-y}{|x-y|^n} \cdot \nu(y)\, do(y)\, f(x) \\
&= -\frac{1}{w_n} \int\limits_{\partial G_0} \frac{x-y}{|x-y|^n} \cdot \nu(y)\, do(y)\, f(x) \\
&= -\int\limits_{\partial G_0} \nabla_y s_n(x-y) \cdot \nu(y)\, do(y)\, f(x).
\end{aligned}
$$

Es bleibt noch das Randintegral zu untersuchen. Satz 2.8 ergibt für $u \in C^2(\overline{G}_0)$

$$
u(x) \;=\; \int\limits_{\partial G_0} \phi(y,x) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) - u(y) \frac{\partial \phi}{\partial \nu_y}(y,x)\, do(y) - \int\limits_{G_0} \phi(y,x) \Delta u(y)\, dy
$$

für eine beliebige Grundlösung, also auch für die Singularitätenfunktion s_n. Wähle $u(x) \equiv 1$. Dann ist $\Delta u = 0$, $\frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\partial G_0} = 0$ und $\phi(y,x) = s_n(x-y)$

$(n \neq 2)$, so dass also folgt:

$$\begin{aligned} 1 &= -\int\limits_{\partial G_0} 1 \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \nu}(y,x)\, do(y) = -\int\limits_{\partial G_0} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial s_n(x-y)}{\partial y_j} \nu_j(y)\, do(y) \\ &= -\int\limits_{\partial G_0} \nabla_y s_n(x-y) \cdot \nu(y)\, do(y). \end{aligned}$$

Damit erhalten wir: $-\Delta w = f \quad \text{in } G.$ □

Der Vollständigkeit halber ziehen wir nun aus den Resultaten zum Newtonpotential und unseren bisherigen Resultaten die für uns wichtige Folgerung. Dabei beachten wir, dass wir bisher das Randwertproblem für harmonische Funktionen nur auf Kugeln lösen können.

5.8 Satz. *Sei $G = B_R(x_0) \subset \mathbb{R}^n$. Seien weiter $g \in C^0(\partial G)$ und $f \in C^{0,\alpha}(G)$, $\sup_G |f| < \infty$. Dann gibt es genau ein $u \in C^2(G) \cap C^0(\overline{G})$ mit*

$$-\Delta u = f \ \textit{in } G, \quad u = g \ \textit{auf } \partial G.$$

Beweis. Bezeichnen wir mit u_1 das Newtonpotential zu f, dann ist nach Satz 5.3 und Satz 5.5 $u_1 \in C^1(\overline{G}) \cap C^2(G)$ und löst $-\Delta u_1 = f$ in G. Nun löse mit Satz 3.4

$$\Delta u_2 = 0 \ \text{ in } G, \quad u_2 = g - u_1 \ \text{ auf } \partial G$$

und setze $u := u_1 + u_2$. Dann löst $u \in C^0(\overline{G}) \cap C^2(G)$ das gewünschte Problem. Die Eindeutigkeit folgt mit dem Maximumprinzip. □

Zur Information wird der allgemeine Existenzsatz für das Randwertproblem für die Poissongleichung notiert.

5.9 Satz. *Es sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, das der äußeren Kegelbedingung genügt. Das bedeutet zu jedem $x_0 \in \partial G$ existiert eine Menge*

$$K := \{y \,|\, y = x_0 + r\xi,\ 0 < r < R,\ \xi \cdot \xi_0 < \cos(\delta_0), \xi \in S^{n-1}\},$$

sodass $\overline{K} \cap \overline{G} = \{x_0\}$ gilt, wobei $R > 0$, $\xi_0 \in S^{n-1}$ und $\delta_0 > 0$ geeignet gewählt sind. Sei weiter $g \in C^0(\partial G)$ und $f \in C^{0,\alpha}(G)$, $\sup_G |f| < \infty$. Dann gibt es genau ein $u \in C^0(\overline{G}) \cap C^2(G)$ mit $u_{x_i x_j} \in C^{0,\alpha}(G)$, so dass

$$-\Delta u = f \ \textit{in } G, \quad u = g \ \textit{auf } \partial G.$$

1.6 Diskretisierung am Beispiel eines Differenzenverfahrens

Wir diskretisieren das Randwertproblem für die Poissongleichung

$$-\Delta u = f \text{ in } G, \quad u = g \text{ auf } \partial G \tag{6.1}$$

mit finiten Differenzen. Bei dieser Gelegenheit führen wir die grundlegenden Begriffe Konsistenz, Stabilität und Konvergenz ein und schaffen uns einen abstrakten Rahmen für die Diskretsierung partieller Differentialgleichungen.

Ein abstrakter Rahmen für Diskretisierung ist durch das folgende Schema gegeben.

$$\begin{array}{rlcl} & X_0 & & Y_0 \\ & \cup & & \cup \\ T: & X & \longrightarrow & Y \\ & \downarrow D_h^X & & \downarrow D_h^Y \\ T_h: & X_h & \longrightarrow & Y_h \end{array}$$

Abbildung 1.1: Schema für die Diskretisierung einer kontinuierlichen Gleichung.

Hierin sind X, Y, X_0, Y_0 geeignete Räume für das kontinuierliche Problem, $Tu = b$ bezeichnet für $u \in X$ und $b \in Y$ das zu lösende kontinuierliche Problem. X_h und Y_h sind geeignete diskrete Räume, die mit den kontinuierlichen Räumen durch Diskretisierungsabbildungen D_h^X und D_h^Y verbunden sind. h steht für die Gitterweite bzw. allgemeiner für einen Diskretisierungsparameter.

Im Fall des Randwertproblems für die Poissongleichung wählen wir nach den analytischen Erfahrungen der vorigen Paragrafen $Tu := (-\Delta u, u|_{\partial G})$ und $b := (f, g)$, wobei wir als Räume

$$X := \{v \in C^0(\overline{G}) \cap C^{2,\alpha}(G) \,\big|\, \sup_G |\Delta v| < \infty\} \subset X_0$$

mit $X_0 := C^0(\overline{G})$ und

$$Y := \{(f,g) \,\big|\, f \in C^{0,\alpha}(G),\ g \in C^0(\partial G),\ \sup_G |f| < \infty\} \subset Y_0$$

mit $Y_0 := \{(f,g) \in C^0(G) \times C^0(\partial G) \,\big|\, \sup_G |f| < \infty\}$ wählen. Damit ist also

$$Tu = b \quad \Leftrightarrow \quad -\Delta u = f \text{ in } G,\ u = g \text{ auf } \partial G.$$

6.2 Lemma. *Es sei G ein Gebiet, das den Bedingungen von Satz 5.9 genügt. Dann ist die Abbildung $T : X \to Y$ linear und bijektiv.*

Beweis. Dass durch T eine Abbildung von X nach Y gegeben ist, sieht man schnell ein. Ist $v \in X$, so folgt $v \in C^0(\overline{G}) \cap C^{2,\alpha}(G)$ und $\sup_G |\Delta v| < \infty$. Durch T wird v abgebildet in $Tv = (-\Delta v, v|_{\partial G})$. Setzen wir $\tilde{v} = -\Delta v$, so ist $\tilde{v} \in C^{0,\alpha}(G)$ und $\sup_G |\tilde{v}| < \infty$. Für $\tilde{w} = v|_{\partial G}$ gilt: $\tilde{w} \in C^0(\partial G)$. Die Linearität von T ist klar.

T ist injektiv. Es reicht zu zeigen: $Tu = 0$ impliziert $u = 0$. Nun bedeutet $Tu = 0$, dass $\Delta u = 0$ in G und $u|_{\partial G} = 0$ ist. Das Maximumprinzip 4.8 liefert dann $u = 0$ in $\overline{G}$.

T ist surjektiv. Es ist zu zeigen, dass es zu jedem Paar $(f, g) \in Y$ ein $u \in X$ gibt, so dass die Gleichung $Tu = (f, g)$ gilt. Es ist $(f, g) \in Y$, falls $f \in C^{0,\alpha}(G)$ mit $\sup_G |f| < \infty$ und $g \in C^0(\partial G)$ sind. Nach Satz 5.9 gibt es dann eine Lösung von $-\Delta u = f$ in $G, u = g$ auf ∂G. Beachte dann außerdem, dass $\sup_G |\Delta u| = \sup_G |f| < \infty$ ist. □

Zur Diskretisierung erfinden wir nun diskrete Räume X_h, Y_h zusammen mit den Diskretisierungsabbildungen D_h^X, D_h^Y. Die klassische Methode ist, dass X_h, Y_h aus Gitterfunktionen bestehen. Wir überdecken $\overline{G}$ mit einem Gitter der Gitterweite $h > 0$:

$$\overline{G}_h = \overline{G} \cap h\mathbb{Z}^n$$

und definieren den Gitterrand durch

$$\partial G_h = \{x \in \overline{G}_h | \ \mathrm{dist}(x, \partial G) < h\}.$$

Dabei verwenden wir den dem Gitter angepassten Abstandsbegriff $\mathrm{dist}(x, \partial G) = \inf_{y \in \partial G} \|x - y\|_{l^\infty}$ mit $\|z\|_{l^\infty} = \max_{j=1,\dots,n} |z_j|$ für $z \in \mathbb{R}^n$. Dementsprechend erklären wir

$$G_h = \overline{G}_h \setminus \partial G_h.$$

Als diskrete Räume wählen wir die Gitterfunktionen auf $\overline{G}_h$ bzw. ∂G_h:

$$X_h = \{u_h : \overline{G}_h \to \mathbb{R}\}, \quad Y_h = \{(f_h, g_h) | f_h : G_h \to \mathbb{R}, g_h : \partial G_h \to \mathbb{R}\}.$$

Die Diskretisierungsabbildungen sind Einschränkungen auf die Gitter. Dabei verlangen wir, dass $\partial G_h \subset \partial G$ ist. Dies ist eine sehr einschränkende Bedingung, die im allgemeinen durch kompliziertere Abbildungen ersetzt werden muss. Wir wollen hier jedoch nur den Rahmen für Differenzenverfahren kennenlernen. Deshalb ist dies hier legitim.

$$D_h^X u := u|_{\overline{G}_h}, \quad D_h^Y(f, g) := (f|_{G_h}, g|_{\partial G_h}).$$

Den diskreten Operator erklären wir durch

$$T_h u_h := (-\Delta_h u_h, u_h|_{\partial G_h}), \quad u_h \in X_h.$$

wobei für $x \in G_h$ definiert wird:

$$(-\Delta_h u_h)(x) = \frac{1}{h^2}\left(2nu_h(x) - \sum_{j=1}^{n} u_h(x+he_j) - \sum_{j=1}^{n} u_h(x-he_j)\right). \quad (6.3)$$

Man beachte, dass $-\Delta_h$ nur auf inneren Gitterpunkten erklärt ist.

Das diskrete Problem lautet nun: Zu $(f_h, g_h) \in Y_h$ finde (genau ein) $u_h \in X_h$, so dass gilt: $T_h u_h = (f_h, g_h)$

6.4 Lemma. *$T_h : X_h \to Y_h$ ist linear und bijektiv.*

Beweis. Die Linearität ist klar. Nun ist $T_h u_h = (f_h, g_h)$ genau dann, wenn

$$-\Delta_h u_h = f_h \text{ auf } G_h,\ u_h = g_h \text{ auf } \partial G_h. \quad (6.5)$$

Das ist aber ein lineares Gleichungssystem zur Bestimmung der Werte von u_h auf $\overline{G}_h$. Es handelt sich um $|\overline{G}_h|$ Unbekannte und $|G_h| + |\partial G_h| = |\overline{G}_h|$ Gleichungen. Also ist Injektivität von T_h äquivalent zur Surjektivität. Wir weisen die Injektivität, d.h. die Eindeutigkeit nach. Dazu ist nachzuweisen, dass aus $Tu_h = (0,0)$ folgt: $u_h = 0$ auf $\overline{G}_h$. Aus $(-\Delta_h u_h, u_h|_{\partial G_h}) = (0,0)$ folgt sofort, dass $u_h = 0$ auf ∂G_h ist. Es bleibt zu beweisen, dass u_h an den inneren Knoten verschwindet. Angenommen, es gibt einen Gitterpunkt $x_0 \in G_h$, in dem u_h sein Maximum annimmt, d.h. $u_h(x_0) = \max_{x \in \overline{G}_h} u_h(x)$ gilt. Aus der diskreten Differentialgleichung $-\Delta_h u_h = 0$ in diesem Punkt folgt dann

$$\sum_{j=1}^{n} \underbrace{(u_h(x_0) - u_h(x_0 - he_j))}_{\geq 0} + \sum_{j=1}^{n} \underbrace{(u_h(x_0) - u_h(x_0 + he_j))}_{\geq 0} = 0.$$

Damit ist u_h auf dem Differenzenstern $x_0 \pm he_j$ konstant gleich $u_h(x_0)$. Nun müssen wir diese Eigenschaft auf ganz G_h ausdehnen. Wir sagen, was ein wegweiser Zusammenhang des Gitters ist: x_0 und $x \in G_h$ sind durch einen Weg in G_h verbunden, falls es $y_0, \ldots, y_k \in G_h$ gibt, so dass $y_0 = x_0, y_k = x, y_{i-1} = y_i \pm he_j$ für $i = 1, \ldots k$ und jeweils ein $j \in \{1, \ldots, n\}$ gilt. Die zu x_0 gehörende Zusammenhangskomponente von G_h bezeichnen wir mit

$$G_h^{weg}(x_0) = \{x \in G_h \,|\, x \text{ ist mit } x_0 \text{ durch einen Weg in } G_h \text{ verbunden}\}$$

und entsprechend

$$G_h^{\overline{weg}}(x_0) = \{x \in \overline{G}_h \,|\, \exists y \in G_h^{weg}(x_0) : x = y \pm he_j\}.$$

Man sieht leicht ein, dass $\emptyset \neq G_h^{\overline{weg}}(x_0) \setminus G_h^{weg}(x_0) \subset \partial G_h$.

- $\overline{G_h^{weg}}(x_0) \setminus G_h^{weg}(x_0) \neq \emptyset$. Da G beschränkt ist, kommt man nach endlich vielen Schritten der Länge h aus $\overline{G}$ raus, d.h. der vorletzte Schritt lag in ∂G_h.
- Falls $x \in \overline{G_h^{weg}}(x_0) \setminus G_h^{weg}(x_0)$, d.h. $\exists y \in G_h^{weg}(x_0) : x = y \pm he_j$. Falls $x \in G_h$, dann sind x und x_0 durch einen Weg verbunden. Widerspruch zu $x \notin G_h^{weg}(x_0)$. Also muss $x \in \partial G_h$ gelten.

Damit gibt es ein $x_1 \in \partial G_h \cap \overline{G_h^{weg}}(x_0)$ und demnach folgt

$$\max_{\overline{G}_h} u_h = u_h(x_0) = u_h(\underbrace{x_1}_{\in \partial G_h}) = 0 = \max_{\partial G_h} u_h,$$

d.h. $u_h = 0$ in $\overline{G}_h$. □

Beispiel. In zwei Raumdimensionen und für das Gebiet $G = (0,1) \times (0,1)$ und die Gitterweite $h = 1/(N+1)$, $N \in \mathbb{N}$, ist

$$\begin{aligned} \overline{G}_h &= \{(hi, hj) |\, 0 \le i,j \le N+1\}, \\ \partial G_h &= \{(hi,hj) \in \overline{G}_h |\, i = 0, N+1 \text{ oder } j = 0, N+1\}. \end{aligned}$$

Wir kürzen für eine Gitterfunktion v ab: $v_{ij} = v(hi, hj)$. Damit lautet das Gleichungssystem (6.5)

$$\begin{aligned} \frac{1}{h^2}\left(4u_{ij} - u_{i+1,j} - u_{i-1,j} - u_{i,j+1} - u_{i,j-1}\right) &= f_{ij} \quad 1 \le i,j \le N, \\ u_{ij} &= g_{ij} \quad \text{in den anderen Knoten.} \end{aligned}$$

Die Lösung solcher Gleichungssysteme war Gegenstand der Untersuchungen in den einführenden Vorlesung Numerik. Es handelt sich um ein symmetrisches Gleichungssystem mit Block-Tridiagonal-Struktur, wenn man die übliche lexigraphische Numerierung beibehält.

Es erhebt sich die wesentliche Frage, ob die Lösung des diskreten Problems (6.5) eine Approximation des kontinuierlichen Problems (6.1) liefert, d.h. gilt mit einer geeigneten Norm $\|u_h - u\| \to 0$, wenn die Gitterweite $h \to 0$ konvergiert? Zur Untersuchung dieses Problems führen wir die grundlegenden Konzepte der numerischen Analysis ein.

6.6 Definition. *Es liege die Situation des Schemas 1.1 vor. Dabei seien X_0, Y_0, X_h, Y_h normierte Räume und $X \subset X_0, Y \subset Y_0$ Teilräume. Das Schema heißt:*

konsistent, *falls für alle $u \in X$ gilt:*

$$\|T_h D_h^X u - D_h^Y T u\|_{Y_h} \to 0 \ (h \to 0),$$

stabil, *falls es eine von h unabhängige Konstante $c_{Stab} > 0$ gibt, so dass für alle $v_h \in X_h$ gilt:*

$$\|v_h\|_{X_h} \leq c_{Stab}\|T_h v_h\|_{Y_h},$$

konvergent, *falls für die Lösung $u_h \in X_h$ von $T_h u_h = b_h$ zu $b_h \in Y_h$ und die Lösung $u \in X$ von $Tu = b$ zu $b \in Y$ gilt:*

$$\|u_h - D_h^X u\|_{X_h} \to 0 \ (h \to 0).$$

6.7 Satz. *Konsistenz und Stabilität implizieren Konvergenz, falls die Daten konsistent approximiert werden, d.h.*

$$\|b_h - D_h^Y b\|_{Y_h} \to 0 \ (h \to 0).$$

Man kann natürlich auch gleich $b_h = D_h^Y b$ wählen.

Beweis. Es seien also $u \in X$, $u_h \in X_h$, $b \in Y$, $b_h \in Y_h$ und $Tu = b, T_h u_h = b_h$. Dann folgt

$$\begin{aligned}
&\|u_h - D_h^X u\|_{X_h} \leq c_{Stab}\|T_h(u_h - D_h^X u)\|_{Y_h} = c_{Stab}\|T_h u_h - T_h D_h^X u\|_{Y_h} \\
&= c_{Stab}\|\underbrace{(T_h u_h - b_h)}_{=0} + (b_h - D_h^Y b) + (D_h^Y b - T_h D_h^X u)\|_{Y_h} \\
&\leq c_{Stab}\{\underbrace{\|b_h - D_h^Y b\|_{Y_h}}_{\to 0} + \underbrace{\|D_h^Y T u - T_h D_h^X u\|_{Y_h}}_{\to 0}\}.
\end{aligned}$$

Und das ergibt die Behauptung des Satzes. □

Auch die umgekehrte Richtung ist wahr. Der Beweis verwendet allerdings das Prinzip der gleichmässigen Beschränktheit, das in der linearen Funktionalanalysis bewiesen wurde. Für uns ist im Moment aber nur die Aussage des Satzes wichtig. Für nichtlineare Abbildungen T ist die Aussage im allgemeinen falsch.

Auch eine quantitative Version des Satzes gilt. Hat man Konsistenz der Ordnung α, d.h. für $h \leq h_0$ gilt

$$\|T_h D_h^X u - D_h^Y T u\|_{Y_h} \leq ch^\alpha,$$

und die rechte Seite wird von der Ordnung α approximiert, dann impliziert Stabilität Konvergenz der Ordnung α, d.h.:

$$\|u_h - D_h^X u\|_{X_h} \leq ch^\alpha.$$

Der Beweis ist offensichtlich analog zum Beweis des vorherigen Satzes.

Für den Fall des Differenzenverfahrens für das Randwertproblem für die Poissongleichung wählen wir folgende Normen auf den am Anfang dieses Paragraphen gewählten Räumen:

$$\|v\|_X = \max_{\overline{G}} |v|, \quad \|(f,g)\|_Y = \sup_G |f| + \sup_{\partial G} |g|,$$
$$\|v_h\|_{X_h} = \max_{\overline{G}_h} |v_h|, \quad \|(f_h,g_h)\|_{Y_h} = \max_{G_h} |f_h| + \max_{\partial G_h} |g_h|.$$

Wir weisen Konsistenz und Stabilität für unser Problem (6.5) nach. Danach folgt mit Satz 6.7 die Konvergenz des Verfahrens.

Der Nachweis der **Konsistenz** besteht wegen der Verwendung der klassischen Funktionenräume in einer angemessenen Taylorentwicklung. Die in der Definition der Konsistenz vorkommenden Größen sind

$$T_h D_h^X u = (-\Delta_h D_h^X u, D_h^X u \,|\, \partial G_h) = (-\Delta_h u|_{G_h},\ u|_{\partial G_h}),$$
$$D_h^Y T u = D_h^Y(-\Delta u, u|_{\partial G}) = ((-\Delta u)|_{G_h}, u|_{\partial G_h}).$$

Also erhalten wir

$$T_h D_h^X - D_h^Y T u = (-\Delta_h(u|_{G_h}) + (\Delta u)|_{G_h}, 0)$$

und damit dann

$$\|T_h D_h^X u - D_h^Y T u\|_{Y_h} = \max_{x\in G_h} |\Delta_h(u|_{G_h})(x) - \Delta u(x)|.$$

Für $x \in G_h$ entwickeln wir die Funktion $u(x \pm he_i)$ nach Taylor und erhalten

$$u(x \pm he_i) = u(x) \pm \partial_i u(x) h + \frac{1}{2}\partial_i^2 u(x) h^2 + o(h^2)$$

für $h \to 0$. Addition dieser beiden Gleichungen und Summation über i ergibt

$$\begin{aligned}&\Delta u(x) - \Delta_h(u|_{G_h})(x)\\ &\quad = \Delta u(x) + \frac{1}{h^2}\Big(2nu(x) - \sum_{j=1}^n u(x+he_j) - \sum_{j=1}^n u(x-he_j)\Big) = o(1)\end{aligned}$$

Wir erhalten

$$\max_{x\in G_h} |\Delta u(x) - \Delta_h(u|_{G_h})(x)| \to 0 \text{ für } h \to 0,$$

also Konsistenz. Außerdem beobachten wir: Ist sogar $u \in C^4(\overline{G})$, so können wir die Taylorentwicklung weitertreiben und erhalten sogar Konsistenz der Ordnung 2:

$$\max_{x \in G_h} |\Delta u(x) - \Delta_h(u|_{G_h})(x)| \le c\|u\|_{C^4(\overline{G})} h^2.$$

Dazu wäre aber die Definition der Konsistenz auf Lösungen u der kontinuierlichen Gleichung einzuschränken.

Wenden wir uns dem Nachweis der **Stabilität** unseres Algorithmus zu.

6.8 Lemma. *Es sei G beschränkt und $-\Delta_h u_h \le 0$ in G_h. Dann gilt:*

$$\max_{\overline{G}_h} u_h \le \max_{\partial G_h} u_h.$$

Beweis : Sei $C = u_h(x_0) = \max_{\overline{G}_h} u_h$. Liegt $x_0 \in \partial G_h$, so ist die Behauptung richtig. Also müssen wir uns nur den Fall $x_0 \in G_h$ ansehen. Die Argumentation ist nun ähnlich wie beim Nachweis der Eindeutigkeit einer Lösung des linearen Gleichungssystems. Wir haben nach Annahme

$$\frac{1}{h^2}\left(2nu_h(x_0) - \sum_{j=1}^n u_h(x_0 + he_j) - \sum_{j=1}^n u_h(x_0 - he_j)\right)$$
$$= \frac{1}{h^2}\Big(\sum_{j=1}^n \underbrace{(u_h(x_0) - u_h(x_0 + he_j))}_{\ge 0} + \sum_{j=1}^n \underbrace{(u_h(x_0) - u_h(x_0 - he_j))}_{\ge 0}\Big) \le 0.$$

Also ist $u_h(x_0) = u_h(x_0 \pm he_j)$ für $j = 1, \dots, n$. Wie im Beweis von Lemma 6.4 folgt dann

$$\max_{\overline{G}_h} u_h = u_h(x_0) = u_h\underbrace{(x_1)}_{\in \partial G_h} \le \max_{\partial G_h} u_h.$$

■

Aus diesem Lemma folgt die Stabilität.

6.9 Lemma. *Sei $G_h \subset [-R, R]^n$. Dann ist das Schema 1.1 stabil, d.h. es gibt eine Konstante $c_{Stab} > 0$, so dass für alle h und alle $v_h \in X_h$ gilt:*

$$\|v_h\|_{X_h} \le c_{Stab}\ \|T_h v_h\|_{Y_h} = c_{Stab}\left(\max_{G_h} |\Delta_h v_h| + \max_{\partial G_h} |v_h|_{\partial G_h}|\right).$$

Beweis. Sei $v_h \in X_h$. Dann gilt

$$-\Delta_h v_h =: f_h \le \max_{G_h} |f_h| =: C_h.$$

Nun ist für die quadratische Funktion x_1^2

$$-\Delta_h x_1^2 = \frac{1}{h^2}\Big(2nx_1^2 - \sum_{j=1}^{n}(x_1 + h\delta_{1,j})^2 - \sum_{j=1}^{n}(x_1 - h\delta_{1,j})^2\Big)$$
$$= \frac{1}{h^2}\big(2x_1 - (x_1^2 + 2x_1 h + h^2) - (x_1^2 - 2x_1 h + h^2)\big) = -2.$$

Wir setzen $u_h(x) := v_h(x) + \frac{\delta}{2}x_1^2$. Dann gilt

$$-\Delta_h u_h(x) = -\Delta_h v_h(x) - \frac{\delta}{2}\Delta_h x_1^2 \le C_h + \frac{\delta}{2}(-2) = C_h - \delta.$$

Mit $\delta := C_h$ gilt also $-\Delta_h u_h \le 0$ auf G_h. Also folgt mit Lemma 6.8 und $g_h := v_h|_{\partial G_h}$:

$$\max_{\overline{G}_h} u_h \le \max_{\partial G_h} u_h = \max_{x\in\partial G_h}(v_h(x) + \frac{C_h}{2}x_1^2) \le \max_{\partial G_h} g_h + \frac{C_h}{2}R^2$$
$$\le \max_{\partial G_h}|g_h| + \frac{R^2}{2}\max_{G_h}|f_h|$$

und damit

$$\max_{\overline{G}_h} v_h = \max_{x\in\overline{G}_h}\big(u_h(x) - \frac{C_h}{2}x_1^2\big) \le \max_{\overline{G}_h} u_h + \frac{R^2}{2}C_h \le \max_{\partial G_h}|g_h| + R^2\max_{G_h}|f_h|.$$

Da auch $-\Delta_h(-v_h) = -f_h \le C_h$, folgt analog durch Übergang von v_h zu $-v_h$

$$\max_{\overline{G}_h} -v_h \le \max_{\partial G_h}|g_h| + R^2\max_{G_h}|f_h|.$$

Aus den beiden letzten Ungleichungen folgt die Behauptung. □

Damit ist nun insgesamt der folgende Konvergenzsatz für ein Differenzenverfahren für die Poissongleichung bewiesen:

6.10 Satz. *Es sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, das Gitter $\overline{G}_h$ mit seinem Rand ∂G_h usw. wie oben. Dann gibt es zu jedem $(f_h, g_h) \in Y_h$ genau eine diskrete Lösung $u_h \in X_h$ von $-\Delta_h u_h = f_h$ auf G_h und $u_h = g_h$ auf ∂G_h. Ausserdem gilt*

$$\|u_h - D_h^X u\|_{X_h} \to 0$$

für $h \to 0$. Liegt die kontinuierliche Lösung $u \in C^4(\overline{G})$, so gilt sogar

$$\|u_h - D_h^X u\|_{X_h} \le Ch^2.$$

Beweis. Die Existenz einer Lösung folgt mit Lemma 6.4. Die Konvergenz folgt mit Satz 6.7 (mit Ordnung), da wir Konsistenz und Stabilität soeben beweisen haben. □

1.7 Das Dirichlet Prinzip und warum man Sobolevräume braucht

Man kann Lösungen des Randwertproblems für die Poissongleichung als Minimum eines Funktionals finden. Dies sind die sogenannten „direkten Methoden der Variationsrechnung". Wir untersuchen zunächst das Randwertproblem

$$-\Delta u = f \text{ in } G, \quad u = 0 \text{ auf } \partial G \tag{7.1}$$

zu einem beschränkten Gebiet $G \subset \mathbb{R}^n$.

7.2 Satz. *Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und sei $f \in C^0(\overline{G})$. Definiere den linearen Raum $X = \{v \in C^1(\overline{G}) |\, v = 0$ auf $\partial G\}$ und das Funktional*

$$I(v) = \frac{1}{2} \int_G |\nabla v(x)|^2 \, dx - \int_G f(x) v(x) \, dx$$

für $v \in X$. Ist $u \in X$ ein Minimum von I über X, d.h. ist $I(u) = \inf_{v \in X} I(v) = \inf\{I(v) |\, v \in X\}$, so folgt

$$\int_G \nabla u(x) \cdot \nabla \varphi(x) \, dx = \int_G f(x) \, \varphi(x) \, dx \tag{7.3}$$

für jedes $\varphi \in X$.

Beweis. Sind $u, \varphi \in X$ und ist $\varepsilon \in \mathbb{R}$, so ist auch $u + \varepsilon\varphi \in X$. Demnach gilt nach Voraussetzung $I(u) \leq I(u + \varepsilon\varphi)$. Setzen wir nun $g(\varepsilon) := I(u + \varepsilon\varphi)$, so hat g in $\varepsilon = 0$ ein Minimum: $g(0) \leq g(\varepsilon), \ \varepsilon \in \mathbb{R}$. Außerdem beobachtet man, dass g ein quadratisches Polynom ist,

$$g(\varepsilon) = \int_G \frac{1}{2} |\nabla u|^2 + \varepsilon \, \nabla u \cdot \nabla \varphi + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \, |\nabla \varphi|^2 - fu - \varepsilon \, f \varphi \, dx,$$

und demnach differenzierbar ist. Also verschwindet die Ableitung von g in 0:

$$0 = g'(0) = \int_G \nabla u \cdot \nabla \varphi - f \varphi \, dx.$$

Das war aber die Behauptung des Satzes. □

Unter einer zusätzlichen Annahme können wir folgern, dass damit das Problem (7.1) gelöst ist.

7.4 Folgerung. *Ist zusätzlich $u \in C^2(G)$, so ist $-\Delta u = f$ in G und $u = 0$ auf ∂G.*

Beweis. Sei $G_0 \subset G$ ein beliebiges Normalgebiet. Für $\varphi \in X$ mit $\operatorname{supp}\varphi \subset G_0$, wobei $\operatorname{supp}\varphi := \overline{\{x \in G |\, \varphi(x) \neq 0\}}$, liefert der Gaußsche Integralsatz

$$0 = \int_{G_0} \nabla u \cdot \nabla\varphi - f\varphi\, dx = \int_{\partial G_0} \varphi \frac{\partial u}{\partial \nu}\, do(x) - \int_{G_0} \varphi\Delta u - \varphi f\, dx$$
$$= \int_{G_0} (\Delta u + f)\, \varphi\, dx,$$

da $\varphi = 0$ auf ∂G_0. Also folgt mit dem Fundamentallemma der Variationsrechnung und wir erhalten $\Delta u + f = 0$ auf G_0 und damit die Behauptung der Folgerung. Für G_0 kann man z.B. geeignete Kugeln wählen. □

Wir versuchen nun zu beweisen, dass es ein Minimum $u \in X$ des Funktionals I auf X gibt. Dazu setzen wir

$$d := \inf_{v \in X} I(v).$$

1. Schritt: Der erste - hier besonders einfache - Schritt ist der Nachweis, dass

$$d < \infty$$

ist. Dies ist klar, denn die Nullfunktion liegt in X. Bei komplizierteren Variationsproblemen ist dieser Schritt unter Umständen schwierig.

2. Schritt: I ist auf X nach unten beschränkt:

$$d > -\infty.$$

Zum Nachweis dieser Eigenschaft benötigen wir die Poincarésche Ungleichung. Der Beweis wird später in allgemeinerem Rahmen in Satz 8.16 nachgeliefert.

7.5 Satz (Poincaré Ungleichung). *Es sei G in einer Richtung des $\mathbb{R}^n$ beschränkt. Dann gibt es eine von G abhängige Konstante c_P, so dass für alle $v \in X$ gilt*

$$\int_G |v(x)|^2\, dx \leq c_P^2 \int_G |\nabla v(x)|^2\, dx. \tag{7.6}$$

Die Beschränktheit von I nach unten folgt dann so:

$$I(v) \geq \frac{1}{2}\int_G |\nabla v|^2\, dx - \left(\int_G |f|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_G |v|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\geq \frac{1}{2}\int_G |\nabla v|^2\, dx - \left(\int_G |f|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} c_P \left(\int_G |\nabla v|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Die einfache Youngsche Ungleichung

$$|ab| \leq \frac{\epsilon}{2}a^2 + \frac{1}{2\epsilon}b^2, \quad \epsilon > 0 \tag{7.7}$$

erlaubt es uns weiter nach unten abzuschätzen.

$$I(v) \geq \frac{1}{2}(1-\epsilon)\int_G |\nabla v|^2\, dx - \frac{c_P}{2\epsilon}\int_G |f|^2\, dx.$$

Die Wahl $\epsilon = \frac{1}{2}$ ergibt dann z.B.

$$I(v) \geq \frac{1}{4}\int_G |\nabla v|^2\, dx - c_P\int_G |f|^2\, dx \geq -c_P\int_G |f|^2\, dx,$$

also die Beschränktheit von I unabhängig von v nach unten. (Auch die Wahl $\epsilon = 1$ hätte dies ergeben.) Demnach ist nun $d \in \mathbb{R}$.

3. Schritt: Nach der Definition des Infimums gibt es eine Folge $(v_m) \subset X$, die **Minimalfolge** genannt wird, mit der Eigenschaft

$$I(v_m) \to d \qquad (m \to \infty).$$

4. Schritt: Die Minimalfolge ist eine Cauchyfolge. Da wir nun von Konvergenz in X sprechen wollen, müssen wir eine Norm auf X einführen. Wir wählen eine dem Problem angepasste Norm, nämlich

$$\|v\|_X := \left(\int_G |v|^2\, dx + \int_G |\nabla v|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{7.8}$$

Damit ist nun $(X, \|\cdot\|_X)$ ein normierter Raum und wir können von Konvergenz und Cauchyfolgen in X sprechen. Es ist nun

$$\begin{aligned}
\int_G |\nabla(v_m - v_l)|^2\, dx &= \int_G |\nabla v_m|^2 + |\nabla v_l|^2 - 2\,\nabla v_m \cdot \nabla v_l\, dx \\
&= \int_G 2\,|\nabla v_m|^2 + 2\,|\nabla v_l|^2 - 4\,\big|\nabla \frac{v_m + v_l}{2}\big|^2\, dx \\
&= 2\left(2I(v_m) + 2\int_G f v_m\, dx + 2I(v_l) + 2\int_G f v_l\, dx\right) \\
&\qquad - 4\left(2I(\frac{v_m + v_l}{2}) + 2\int_G f\,\frac{v_m + v_l}{2}\, dx\right) \\
&= 4\left(I(v_m) + I(v_l) - 2I\big(\frac{v_m + v_l}{2}\big)\right).
\end{aligned}$$

Weil die Funktion $\frac{1}{2}(v_m + v_l)$ in X liegt, folgt $I(\frac{1}{2}(v_m + v_l)) \geq d$ und demnach

$$\int_G |\nabla(v_m - v_l)|^2 \, dx \leq 4 \left(I(v_m) + I(v_l) - 2d \right).$$

Wegen $\lim_{m\to\infty} I(v_m) = \lim_{l\to\infty} I(v_l) = d$ konvergiert die rechte Seite in dieser Ungleichung für $m, l \to \infty$ gegen Null, und wir erhalten schließlich

$$\int_G |\nabla(v_m - v_l)|^2 \, dx \to 0, \quad (m, l \to \infty).$$

Wir verwenden noch einmal die Poincaré Ungleichung und haben dann nachgewiesen, dass $(v_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in dem normierten Raum X ist. Wir fassen dies zusammen.

7.9 Satz. *Eine Minimalfolge für I auf X ist eine Cauchyfolge in X.*

Leider können wir den **5. Schritt** der Konvergenz dieser Cauchyfolge gegen ein Element $u \in X$ nicht vollziehen, denn es zeigt sich, dass der normierte Raum $(X, \|\cdot\|_X)$ nicht vollständig, also kein Banachraum ist (siehe Übung).

Beispiel. Sei $G = (a, b)$. Durch $X = \{v \in C^1([a, b]) \,|\, v(a) = v(b) = 0\}$ mit $\|v\|_X = \left(\int_a^b |v(x)|^2 + |v'(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}$ ist ein normierter Raum gegeben, der mit dieser Norm nicht vollständig ist.

Zwar könnten wir X mit der $C^1(\overline{G})$-Norm versehen und damit zu einem Banachraum machen, jedoch könnten wir dann kaum direkt aus dem Variationsproblem nachweisen, dass eine Minimalfolge eine Cauchyfolge in diesem neuen Raum ist. Das liegt daran, dass die C^1-Norm dem Funktional nicht angepasst ist.

Der Wunsch den **5. Schritt** im Nachweis der Existenz einer Lösung des Variationsproblems zu vollziehen ist nun der Grund für die Einführung adäquater Räume, der Sobolevräume im nächsten Paragraphen. Man kann die Einführung dieser Räume auch so verstehen, dass die Lösungen des Variationsproblems eben gerade in diesen Räumen liegen und nicht in „stärkeren“ Funktionenräumen.

Außerdem werden wir diskrete Teilräume dieser Räume konstruieren, die ebenfalls nicht Teilräume des klassischen Funktionenraums $C^1(\overline{G})$ sind.

1.8 Sobolevräume

Wie wir im vorigen Paragraphen gesehen haben, benötigen wir andere Räume als die klassischen C^k–Funktionenräume in der Integralnorm um die Existenz von Lösungen des Variationsproblemes zu zeigen. Wir wiederholen zunächst die grundlegenden Tatsachen über die L^p–Räume. Im folgenden ist $G \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge.

8.1 Definition. *Für $1 \le p \le \infty$ definieren wir*

$$\begin{aligned}
L^p(G) &:= \{u : G \to \mathbb{R} \mid u \text{ ist Lebesgue–meßbar und } \|u\|_{L^p(G)} < \infty\}, \\
\|u\|_{L^p(G)} &:= \Big(\int_G |u(x)|^p \, dx\Big)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{falls } p < \infty, \\
\|u\|_{L^\infty(G)} &:= \inf_{\substack{N \subset G \\ N \text{ ist Lebesgue–} \\ \text{Nullmenge}}} \ \sup_{G \setminus N} |u| .
\end{aligned}$$

Zwei Funktionen in $L^p(G)$ nennen wir gleich, wenn sie sich höchstens auf einer Lebesgue–Nullmenge unterscheiden. Für die Normen schreiben wir auch

$$\|u\|_{L^p(G)} = \|u\|_p,$$

im Fall $p = 2$ lassen wir den Index p weg. Außerdem sei

$$L^p_{loc}(G) := \{u : G \to \mathbb{R} \mid \forall\, G' \subset\subset G,\ G' \text{ offen: } u|_{G'} \in L^p(G')\} \ .$$

Aus den Grundvorlesungen in Analysis wissen wir, dass die L^p-Räume vollständig sind.

8.2 Satz (Fischer–Riesz). *$L^p(G)$ ist mit $\|\cdot\|_{L^p(G)}$ ein Banachraum. $L^2(G)$ ist mit dem Skalarprodukt*

$$(u_1, u_2)_{L^2(G)} = \int_G u_1 u_2 \, dx$$

ein Hilbertraum.

Zur Definition der Sobolevräume erweitern wir den Begriff der Ableitung einer Funktion auf sogenannte schwache Ableitungen oder Distributionsableitungen.

8.3 Definition. *Sei G ein Gebiet und $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n$ ein Multiindex, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$. Eine Funktion $u \in L^1_{loc}(G)$ besitzt die* **schwache Ableitung** *$v_\alpha \in L^1_{loc}(G)$, wenn für alle Testfunktionen $\varphi \in C_0^\infty(G)$ die Gleichung*

$$\int_G u \ D^\alpha \varphi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_G v_\alpha \, \varphi \, dx$$

erfüllt ist. Wir schreiben dann

$$v_\alpha = D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Dabei ist

$$C_0^\infty(G) := \{\varphi \in C^\infty(G) | \operatorname{supp} \varphi \textit{ ist kompakt und } \subset G\}.$$

Man kann zeigen, dass schwache Ableitungen eindeutig sind und dass klassische Ableitungen, wenn sie existieren, auch schwache Ableitungen sind (Fundamentallemma der Variationsrechnung). Mehr Informationen über schwache Ableitungen findet man in dem Buch von H.W. Alt.

8.4 Beispiel. Die im Nullpunkt nicht differenzierbare Funktion $u(x) = |x|$ besitzt auf $G = (-1, 1) \subset \mathbb{R}$ eine schwache Ableitung (hier mit $'$ bezeichnet). $u'(x) = \operatorname{sign}(x)$. Wie man sie in $x = 0$ definiert ist gleichgültig, da ein Punkt eine Lebesgue-Nullmenge ist. Für $\varphi \in C_0^\infty(G)$ gilt

$$\begin{aligned} -\int_{-1}^{1} |x|\, \varphi'(x)\, dx &= -\int_{-1}^{0} -x\varphi'(x)\, dx - \int_0^1 x\varphi'(x)\, dx \\ &= x\varphi(x)\big|_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} \varphi(x)\, dx - x\varphi(x)\big|_0^1 + \int_0^1 \varphi(x)\, dx \\ &= \int_{-1}^{1} \operatorname{sign}(x)\varphi(x)\, dx. \end{aligned}$$

8.5 Beispiel. Wir interessieren uns dafür, ob, bzw. für welche $s \in \mathbb{R}$, die Funktion $u(x) = |x|^s$ ($x \in G = B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$) schwache Ableitungen erster Ordnung besitzt. Für $x \neq 0$ ist u klassisch stetig differenzierbar. Zunächst ist festzustellen, ob $u \in L^1(G)$ ist. Polarkoordinaten im $\mathbb{R}^n$ liefern

$$\begin{aligned} \int_{B_1(0)} |u(x)|\, dx = \int_{B_1(0)} |x|^s\, dx &= \int_0^1 \int_{S^{n-1}} r^{s+n-1}\, do\, dr \\ &= \omega_n \int_0^1 r^{s+n-1} dr < \infty, \end{aligned}$$

falls $s + n - 1 > -1$, d.h. $s > -n$ ist. Sei im folgenden also $s > -n$. Für $x \neq 0$ ist mit $\alpha = e_i$ ($i \in \{1, \dots, n\}$)

$$(D^\alpha u)(x) = \partial_i u(x) = s|x|^{s-2} x_i.$$

Wir vermuten, dass dies für geeignete s auch eine schwache Ableitung ist. Dazu seien $\varphi \in C_0^\infty(B_1(0))$ und $0 < \varepsilon < 1$.

$$\int_{B_1(0)} u\ \partial_i\varphi\, dx = \int_{B_\varepsilon(0)} u\ \partial_i\varphi\, dx + \int_{B_1(0)\setminus\overline{B_\varepsilon(0)}} u\ \partial_i\varphi\, dx. \tag{8.6}$$

Der Gaußsche Integralsatz liefert für das zweite Integral wegen $\varphi|_{\partial B_1(0)} = 0$

$$\begin{aligned}\int\limits_{B_1(0)\setminus\overline{B_\varepsilon(0)}} u\,\partial_i\varphi\,dx &= \int\limits_{\partial(B_1(0)\setminus\overline{B_\varepsilon(0)})} u\,\varphi\,\nu_i\,do(x) - \int\limits_{B_1(0)\setminus\overline{B_\varepsilon(0)}} \partial_i u\,\varphi\,dx \\ &= -\int\limits_{\partial B_\varepsilon(0)} u\,\varphi\,\nu_i\,do(x) - \int\limits_{B_1(0)\setminus\overline{B_\varepsilon(0)}} \partial_i u\,\varphi\,dx.\end{aligned} \tag{8.7}$$

Dabei ist unter ν immer die äußere Normale an den „Integrationsbereich" zu verstehen. Wir haben dabei verwendet, dass $u \in C^1(\overline{B_1(0)} \setminus \{0\})$ ist. Weil wir nun $\varepsilon \to 0$ streben lassen wollen, müssen wir sicherstellen, dass $\partial_i u \in L^1(B_1(0))$ ist. Es ist aber

$$|\partial_i u(x)| \le s|x|^{s-1},$$

und demnach ist $|\partial_i u|$ integrierbar, falls $s-1 > -n$, d.h. $s > 1-n$ ist. Also existieren in diesem Fall die Grenzwerte der Volumenintegrale in (8.6), (8.7) für $\varepsilon \to 0$ und wir erhalten

$$\int_{B_1(0)} u\,\partial_i\varphi\,dx = -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial B_\varepsilon(0)} u\,\varphi\,\nu_i\,do(x) - \int_{B_1(0)} \partial_i u\,\varphi\,dx.$$

Dass der Grenzwert des Oberflächenintegrals Null ist, sieht man so:

$$\Big|\int_{\partial B_\varepsilon(0)} u(x)\varphi(x)\nu_i(x)\,do(x)\Big| \le \max_{B_1(0)}|\varphi| \int_{\partial B_\varepsilon(0)} |u(x)|\,do(x)$$

und

$$\int_{\partial B_\varepsilon(0)} |u(x)| do(x) = \int_{S^{n-1}} \varepsilon^{s+n-1}\,do(x) = \omega_n\varepsilon^{s+n-1}$$

konvergiert gegen Null für $\varepsilon \to 0$, da $s > 1-n$ ist.

Wir fassen zusammen: Die Funktion $u(x) = |x|^s$ ($x \in B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$) besitzt die schwache Ableitung $\partial_i u(x) = s|x|^{s-2}x_i$, falls $s > 1-n$ ist.

Nun definieren wir die Räume, die sowohl für die Analysis als auch für die Numerik partieller Differentialgleichungen wichtige Hilfsmittel sind.

8.8 Definition (Sobolevräume). *Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Für $m \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ und $p \in [1,\infty]$ definieren wir*

$$\begin{aligned}H^{m,p}(G) := \{u \in L^p(G) \mid\ & u \text{ besitzt schwache Ableitungen} \\ & D^\alpha u \in L^p(G) \text{ für } 0 \le |\alpha| \le m\},\end{aligned}$$

$$\|u\|_{H^{m,p}(G)} := \Big(\sum_{|\alpha|=0}^{m} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(G)}\Big)^{\frac{1}{p}}, \text{ falls } p < \infty ,$$
$$\|u\|_{H^{m,\infty}(G)} := \sum_{|\alpha|=0}^{m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(G)} .$$

Außerdem vereinbaren wir folgende Schreibweisen:

$$|u|_{H^{m,p}(G)} := \Big(\sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(G)}\Big)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{falls } p < \infty ,$$
$$|u|_{H^{m,\infty}(G)} := \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(G)} ,$$
$$H^m(G) := H^{m,2}(G) .$$

Wenn keine Verwechslungsgefahr besteht, schreiben wir auch

$$\|u\|_{m,p} = \|u\|_{H^{m,p}(G)}, \qquad |u|_{m,p} = |u|_{H^{m,p}(G)} ,$$
$$\|u\|_{m} = \|u\|_{H^{m}(G)}, \qquad |u|_{m} = |u|_{H^{m}(G)} .$$

Nach Definition ist $H^{0,p}(G) = L^p(G)$. Der Sobolevraum $H^{m,p}(G)$ ist also so etwas wie „$L^p(G)$ mit schwachen Ableitungen bis zur Ordnung m, die in $L^p(G)$ liegen".

8.9 Beispiel. Führen wir nun das Beispiel 8.5 fort, indem wir untersuchen, ob $u \in H^{1,p}(B_1(0))$ ist. Dazu ist zunächst nachzusehen, ob $u \in L^p(B_1(0))$ für ein $1 \le p < \infty$ ist. Wegen

$$|u(x)|^p \le |x|^{sp}$$

ist $u \in L^p(B_1(0))$, wenn $sp > -n$ ist. Für die schwache Ableitung gilt

$$|\partial_i u(x)|^p \le s^p |x|^{p(s-1)},$$

d.h. $\partial_i u \in L^p(B_1(0))$, falls $p(s-1) > -n$ ist. Also ist $u \in H^{1,p}(B_1(0))$, wenn $s > 1 - \frac{n}{p}$ gilt.

Funktionen aus Sobolevräumen sind im allgemeinen nicht stetig. Ein prominentes Beispiel ist das folgende.

8.10 Beispiel. Für die Funktion $u(x) = \log|\log|x||$ $(x \in G = B_{\frac{1}{e}}(0) \subset \mathbb{R}^2)$ gilt $u \in H^{1,2}(G)$, aber $u \notin C^0(\overline{G})$.

Man überlege sich, dass man aus diesem Beispiel Funktionen $v \in H^{1,2}(G)$ mit abzählbar vielen Singularitäten basteln kann:

$$v(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j u(x - \delta_j).$$

Die Sobolevräume $H^{m,p}(G)$ wurden definiert, weil die klassischen Funktionenräume stetig differenzierbarer Funktionen in der entsprechenden Integralnorm nicht vollständig sind. Deshalb ist der folgende Satz der für uns wichtigste.

8.11 Satz. *$H^{m,p}(G)$, $1 \leq p \leq \infty$, $m \in \mathbb{N}_0$ ist ein Banachraum. $H^m(G)$ ist ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt*

$$(u, v)_{H^m(G)} = \sum_{|\alpha|=0}^{m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(G)}.$$

Beweis. Der Beweis ist eine direkte Folge aus dem Satz von Fischer-Riesz (Satz 8.2). Sei also $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $H^{m,p}(G)$. Wegen

$$\|D^\alpha v_k - D^\alpha v_l\|_{L^p(G)} \leq \|v_k - v_l\|_{H^{m,p}(G)}$$

für jeden Multiindex $0 \leq |\alpha| \leq m$ ist $(D^\alpha v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $L^p(G)$. Nach Satz 8.2 gibt es einen Grenzwert $v^\alpha \in L^p(G)$ mit $\|D^\alpha v_k - v^\alpha\|_{L^p(G)} \to 0$ für $k \to \infty$. Definiere $v = v^0$. Dann ist zu zeigen, dass v schwache Ableitungen $D^\alpha v$ besitzt und $D^\alpha v = v^\alpha$ ist. Dazu sei $\varphi \in C_0^\infty(G)$. Weil v_k eine schwache Ableitung $D^\alpha v_k \in L^p(G)$ besitzt gilt

$$\begin{aligned}
&\int_G v D^\alpha \varphi \, dx = \int_G (v - v_k) D^\alpha \varphi \, dx + \int_G v_k D^\alpha \varphi \, dx \\
&= \int_G (v - v_k) D^\alpha \varphi \, dx + (-1)^{|\alpha|} \int_G D^\alpha v_k \varphi \, dx \\
&= \int_G (v - v_k) D^\alpha \varphi \, dx + (-1)^{|\alpha|} \int_G (D^\alpha v_k - v^\alpha) \varphi \, dx + (-1)^{|\alpha|} \int_G v^\alpha \varphi \, dx.
\end{aligned}$$

Mit der Hölderschen Ungleichung erhält man dann mit dem dualen Exponenten p', $p^{-1} + (p')^{-1} = 1$,

$$\begin{aligned}
&|\int_G v D^\alpha \varphi \, dx - (-1)^{|\alpha|} \int_G v^\alpha \varphi \, dx| \\
&\qquad \leq \|v - v_k\|_{L^p(G)} \|D^\alpha \varphi\|_{L^{p'}(G)} + \|v^\alpha - D^\alpha v_k\|_{L^p(G)} \|\varphi\|_{L^{p'}(G)} \to 0
\end{aligned}$$

für $k \to \infty$. Das heißt, dass

$$\int_G v D^\alpha \varphi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_G v^\alpha \varphi \, dx$$

für alle $\varphi \in C_0^\infty(G)$ gilt, also $v^\alpha = D^\alpha v$ ist. $\square$

Wir befassen uns mit Randwertproblemen für partielle Differentialgleichungen. Wir müssen also einen Weg finden, um Randwerte für $H^{m,p}(G)$–Funktionen im verallgemeinerten Sinn zu definieren. Wir beschränken uns zunächst auf den Spezialfall von 0–Randwerten. Der allgemeine Fall wird später behandelt.

8.12 Definition. *Für $1 \le p < \infty$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ sei*

$$\mathring{H}^{m,p}(G) = \overline{C_0^m(G)}^{\|\cdot\|_{H^{m,p}(G)}}.$$

Für $\mathring{H}^{m,2}(G)$ schreiben wir auch verkürzend $\mathring{H}^m(G)$. Dabei ist $C_0^m(G) = \{\varphi \in C^m(G) |\, \operatorname{supp}\varphi$ *ist kompakt und* $\subset G\}$.

Das bedeutet, dass $\mathring{H}^{m,p}(G)$ aus den Funktionen besteht, die sich in der $H^{m,p}(G)$-Norm durch Funktionen aus $C_0^m(G)$ approximieren lassen.

8.13 Satz. *$\mathring{H}^{m,p}(G)$ ist für $1 \le p < \infty$ ein abgeschlossener Teilraum von $H^{m,p}(G)$, also wieder ein Banachraum.*

Aus praktischen Gründen führen wir noch eine Bezeichnung für den Dualraum von $\mathring{H}^{m,p}(G)$ ein. Der Dualraum eines Raums X besteht aus den stetigen linearen Funktionalen $F : X \to \mathbb{R}$.

8.14 Definition. *Sei $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Dann schreiben wir*

$$H^{-m,p'}(G) := \left(\mathring{H}^{m,p}(G)\right)', \quad \|f\|_{H^{-m,p'}(G)} := \sup_{v \in \mathring{H}^{m,p}(G)\setminus\{0\}} \frac{|f(v)|}{\|v\|_{H^{m,p}(G)}}.$$

Mit dieser Bezeichnung, die wir wie üblich durch die Abkürzung

$$H^{-m}(G) = \left(\mathring{H}^m(G)\right)'$$

ergänzen, ist es uns möglich, Differentialgleichungen theoretisch und numerisch zu lösen, deren rechte Seiten Funktionale und keine Funktionen sind. Dazu gehören z.B. rechte Seiten, die als Ableitungen von $L^q(G)$-Funktionen interpretiert werden können. Dies zeigt das folgende

8.15 Beispiel. Sei $g \in L^{p'}(G)$ und $j \in \{1, \dots, n\}$ fest gewählt. Dann ist durch

$$f(v) = -\int_G D_j v \; g \, dx$$

ein $f \in H^{-m,p'}(G)$ gegeben. f ist offensichtlich linear. Wir zeigen, dass f beschränkt ist und damit auch $H^{m,p}(G)$ nach $\mathbb{R}$ abbildet. Für jedes $v \in H^{m,p}(G)$ gilt:

$$|f(v)| \le \int_G |D_j v| \; |g| \, dx \le \|D_j v\|_{L^p(G)} \; \|g\|_{L^{p'}(G)} \le \|v\|_{H^{m,p}(G)} \; \|g\|_{L^{p'}(G)}.$$

Also ist $\|f\|_{H^{-m,p'}(G)} \le \|g\|_{L^{p'}(G)}$.

Nachzutragen ist noch die Poincaré Ungleichung, die wir nun gleich für $\mathring{H}^{1,p}(G)$–Funktionen beweisen. Dabei kümmern wir uns zunächst nicht um die optimale Konstante in dieser Ungleichung und merken uns nur, dass eine Abhängigkeit vom Durchmesser des Gebietes typisch ist.

8.16 Satz (Poincaré Ungleichung). *Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, dass in mindestens einer Richtung beschränkt ist und sei d der Durchmesser von G in einer beliebigen Richtung. Dann gibt es eine Konstante $c_P \leq 2d$, so dass für alle $v \in \mathring{H}^{1,p}(G)$ gilt:*

$$\|v\|_{L^p(G)} \leq c_P \|\nabla v\|_{L^p(G)}. \tag{8.17}$$

Beweis. Es reicht, die Abschätzung (8.17) für $v \in C_0^1(G)$ nachzuweisen, denn zu $v \in \mathring{H}^{1,p}(G)$ wähle gemäß Definition 8.12 eine Folge $v_j \in C_0^1(G)$ $(j \in \mathbb{N})$ mit $\|v - v_j\|_{H^{1,p}(G)} \to 0$ $(j \to \infty)$. Ist (8.17) für $C_0^1(G)$–Funktionen bewiesen, so folgt:

$$\begin{aligned}
\|v\|_{L^p(G)} &\leq \|v_j\|_{L^p(G)} + \|v_j - v\|_{L^p(G)} \leq c_P \|\nabla v_j\|_{L^p(G)} + \|v_j - v\|_{L^p(G)} \\
&\leq c_P \|\nabla v\|_{L^p(G)} + c_P \|\nabla(v_j - v)\|_{L^p(G)} + \|v_j - v\|_{L^p(G)} \\
&\to c_P \|\nabla v\|_{L^p(G)} \quad (j \to \infty).
\end{aligned}$$

Ist nun also $v \in C_0^1(G)$, so setze v durch 0 auf den $\mathbb{R}^n$ fort:

$$\overline{v}(x) := \begin{cases} v(x) & (x \in G) \\ 0 & (x \in \mathbb{R}^n \setminus G). \end{cases}$$

Ist z. B. $G \subset [-d, d] \times \mathbb{R}^{n-1}$, so folgt wegen $\overline{v} \in C^1(\mathbb{R}^n)$

$$\overline{v}(x) = \int_{-d}^{x_1} \partial_1 \overline{v}(s, x_2, \ldots, x_n) ds,$$

also mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ auch

$$\begin{aligned}
|\overline{v}(x_1, \ldots, x_n)|^p &\leq \Big(\int_{-d}^{x_1} |\partial_1 \overline{v}(s, x_2, \ldots, x_n)| ds \Big)^p \\
&\leq \int_{-d}^{d} |\partial_1 \overline{v}(s, x_2, \ldots, x_n)|^p ds \Big(\int_{-d}^{d} 1^{p'} ds \Big)^{\frac{p}{p'}} , \\
&\leq (2d)^{\frac{p}{p'}} \int_{-d}^{d} |\partial_1 \overline{v}(s, x_2, \ldots, x_n)|^p ds \; .
\end{aligned}$$

Integration bezüglich x_1 liefert

$$\int_{-d}^{d} |\overline{v}(x_1, \ldots, x_n)|^p dx_1 \leq (2d)^{\frac{p}{p'}+1} \int_{-d}^{d} |\partial_1 \overline{v}(s, x_2, \ldots, x_n)|^p ds \, ,$$

und Integration über die restlichen Richtungen $x_2, \dots, x_n$ liefert

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\overline{v}(x)|^p dx \leq (2d)^{\frac{p}{p'}+1} \int_{\mathbb{R}^n} |\partial_1 \overline{v}(x)|^p dx$$

oder

$$\left(\int_G |v(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq 2d \left(\int_G |\partial_1 v(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

□

8.18 Folgerung. *Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, dass in mindestens einer Richtung beschränkt ist. Dann ist die Gradientennorm auf $\mathring{H}^{1,p}(G)$ eine äquivalente Norm, d.h. es gibt eine Konstanten $c_1 > 0$ so, dass*

$$c_1 \|v\|_{H^{1,p}(G)} \leq \|\nabla v\|_{L^p(G)} \leq \|v\|_{H^{1,p}(G)}. \tag{8.19}$$

Beweis. Die zweite in Ungleichung in (8.19) ist trivial. Weiter gilt auf Grund der Poincaré Ungleichung

$$\|v\|_{H^{1,p}(G)} = \left(\|v\|^p_{L^p(G)} + \|\nabla v\|^p_{L^p(G)}\right)^{\frac{1}{p}} \leq (1 + c_P^p)^{\frac{1}{p}} \|\nabla v\|_{L^p(G)},$$

d.h. (8.19) gilt mit $c_1 := (1 + c_P^p)^{\frac{-1}{p}}$. □

1.9 Der Laplace-Operator auf Sobolevräumen

Nun sind alle Räume bekannt, um den Laplace-Operator auf Sobolevräumen zu untersuchen. Dabei sind für uns zunächst nur die Räume $\mathring{H}^1(G)$ und $H^{-1}(G)$ wichtig. Im folgenden sei $G \subset \mathbb{R}^n$ stets ein beschränktes Gebiet.

9.1 Lemma. *Durch*

$$(-\Delta u)(\varphi) := \int_G \nabla u \cdot \nabla \varphi, \quad (\varphi \in \mathring{H}^1(G)) \tag{9.2}$$

ist ein linearer Operator $-\Delta : \mathring{H}^1(G) \to H^{-1}(G)$ definiert.

Beweis. Es ist zu zeigen, dass für $u \in \mathring{H}^1(G)$ das Bild $-\Delta u \in H^{-1}(G)$ ist. Für $\varphi \in \mathring{H}^1(G)$ hat man

$$\begin{aligned} |(-\Delta u)(\varphi)| \leq \int_G |\nabla u||\nabla \varphi| &\leq \|\nabla u\|_{L^2(G)} \|\nabla \varphi\|_{L^2(G)} \\ &\leq \|\nabla u\|_{L^2(G)} \|\varphi\|_{H^1(G)} < \infty \end{aligned} \tag{9.3}$$

Die Linearität von $-\Delta u$ ist klar. Aus der Abschätzung (9.3) folgt dann die Stetigkeit von $-\Delta u$, d.h. $-\Delta u \in H^{-1}(G)$. Somit ist $-\Delta$ wohldefiniert. Die Linearität folgt sofort der Linearität der Differentiation und Integration. □

9.4 Satz. *Zu jedem* $f \in H^{-1}(G)$ *gibt es ein* $u \in \mathring{H}^1(G)$ *mit* $-\Delta u = f$ *in* $H^{-1}(G)$.

Beweis. Den Beweis haben wir eigentlich schon in Paragraph 1.7 erledigt. Nur verwenden wir nun von Beginn an den Raum $X = \mathring{H}^1(G)$, in dem dann unsere Cauchyfolge konvergieren wird. Wie dort setzen wir $d = \inf_{v \in X} I(v)$ mit dem Funktional

$$I(v) = \frac{1}{2}\int_G |\nabla v|^2 - f(v).$$

Es ist $d < \infty$, weil $0 \in X$. Die Beschränktheit von unten sieht etwas anders aus. Wir verwenden die Definition der Norm im Dualraum und erhalten mit Folgerung 8.18 aus der Poincaré Ungleichung

$$\begin{aligned} I(v) &\geq \frac{1}{2}\|\nabla v\|^2_{L^2(G)} - |f(v)| \geq \frac{1}{2}\|\nabla v\|^2_{L^2(G)} - \|f\|_{H^{-1}(G)}\|v\|_{H^1(G)} \\ &\geq \frac{1}{2}\|\nabla v\|^2_{L^2(G)} - \|f\|_{H^{-1}(G)}\sqrt{1 + c_P^2}\|\nabla v\|_{L^2(G)} \\ &\geq \frac{1}{2}(1-\varepsilon)\|\nabla v\|^2_{L^2(G)} - \frac{1+c_P^2}{2\varepsilon}\|f\|^2_{H^{-1}(G)}. \end{aligned}$$

Eine geeignete Wahl von ε liefert die Beschränktheit von I von unten und demnach $d > -\infty$.

Wie in Paragraph 1.7 wählen wir nun eine Minimalfolge $(v_m)_{m\in\mathbb{N}}$ mit $I(v_m) \to d$ für $m \to \infty$ und weisen nach, dass sie eine Cauchyfolge in X ist. Dies ist fast wörtlich derselbe Beweis wie in Paragraph 1.7. Nur ist $\int_G fv$ durch $f(v)$ zu ersetzen. Nun können wir fortfahren mit dem

5. Schritt: Da $X = \mathring{H}^1(G)$ nach Satz 8.13 vollständig ist, gibt es ein $u \in X$, so dass $\|v_m - u\|_X \to 0$ für $m \to \infty$.

6. Schritt: $I(u) = d$. Dazu ist zu zeigen, dass I stetig ist. Dies geht so:

$$\begin{aligned} |I(u) - I(v_m)| &= \left|\frac{1}{2}\|\nabla u\|^2_{L^2(G)} - f(u) - \frac{1}{2}\|\nabla v_m\|^2_{L^2(G)} + f(v_m)\right| \\ &\leq \frac{1}{2}\left|\|\nabla u\|^2_{L^2(G)} - \|\nabla v_m\|^2_{L^2(G)}\right| + |f(u - v_m)| \\ &\leq \frac{1}{2}\left(\|\nabla u\|_{L^2(G)} + \|\nabla v_m\|_{L^2(G)}\right)\|\nabla(u - v_m)\|_{L^2(G)} \\ &\quad + \|f\|_{H^{-1}(G)}\|u - v_m\|_{H^1(G)}. \end{aligned}$$

Die rechte Seite dieser Ungleichung konvergiert gegen Null, denn Cauchfolgen sind beschränkt, $\|\nabla v_m\|_{L^2(G)} \leq \|v_m\|_{H^1(G)} \leq C$ und $\|u - v_m\|_{H^1(G)} \to 0$ für $m \to \infty$.

7. Schritt: Wie im Beweis von Satz 7.2 erhält man dann für das Minimum u die gewünschte Gleichung

$$\int_G \nabla u \cdot \nabla\varphi = f(\varphi) \quad \text{für alle } \varphi \in \mathring{H}^1(G),$$

was ja gerade $-\Delta u = f$ in $H^{-1}(G)$ bedeutet. □

Wir halten den wichtigen Begriff der schwachen Lösung in einer eigenen Definition fest.

9.5 Definition. *Eine Funktion u heißt* **schwache Lösung** *von*

$$-\Delta u = f \text{ in } G, \quad u = 0 \text{ auf } \partial G,$$

falls

$$u \in \mathring{H}^1(G) \text{ und } \int_G \nabla u \cdot \nabla\varphi = f(\varphi)$$

für alle $\varphi \in \mathring{H}^1(G)$ gilt.

Damit sind die Abbildungseigenschaften von $-\Delta$ fast vollständig geklärt.

9.6 Satz. *Die Abbildung $-\Delta : \mathring{H}^1(G) \to H^{-1}(G)$ ist linear, bijektiv und stetig. Es gilt mit einer nur von G abhängenden positiven Konstanten c_G*

$$c_G \|u\|_{H^1(G)} \le \|-\Delta u\|_{H^{-1}(G)} \le \|u\|_{H^1(G)} \tag{9.7}$$

für jedes $u \in \mathring{H}^1(G)$. In der üblichen Schreibweise für lineare beschränkte Operatoren impliziert dies, dass $-\Delta \in L(\mathring{H}^1(G), H^{-1}(G))$ ist.

Beweis. Beginnen wir mit der Abschätzung nach unten, die dann die Injektivität der Abbildung $-\Delta$ ergibt. Für $u \neq 0$ gilt mit Folgerung 8.18

$$\begin{aligned}\|-\Delta u\|_{H^{-1}(G)} &= \sup_{\varphi \in H^1(G)\setminus\{0\}} \frac{|(-\Delta u)(\varphi)|}{\|\varphi\|_{H^1(G)}} \\ &\ge \frac{|(-\Delta u)(u)|}{\|u\|_{H^1(G)}} = \frac{\|\nabla u\|^2_{L^2(G)}}{\|u\|_{H^1(G)}} \ge c_1^2 \|u\|_{H^1(G)} .\end{aligned}$$

Die Abschätzung nach oben folgt sofort aus (9.3). Die Linearität wurde bereits in Lemma 9.1 bewiesen. Die Surjektivität wurde in Satz 9.4 gezeigt. Die Stetigkeit folgt aus der Abschätzung nach oben in (9.7) und der Linearität des Operators. □

1.10 Approximation und Randwerte von Sobolevfunktionen

Wir beginnen damit zu zeigen, dass Funktionen aus einem Sobolevraum in einer Raumdimension stetig sind. Das folgende Lemma dient gleichzeitig dazu zu zeigen, wie man sogenannte Sobolevsche Einbettungssätze beweist und wie diese zu interpretieren sind. Es handelt sich hier um den einfachsten Fall eines solchen Einbettungssatzes. Allgemeinere Resultate werden wir später herleiten.

10.1 Lemma. *Sei $-\infty < a < b < \infty$ und $I = (a,b) \subset \mathbb{R}$. Dann gibt es zu $u \in \mathring{H}^1(I)$ eine Funktion $\tilde{u} \in C^0(\overline{I})$ mit $u = \tilde{u}$ fast überall in I und $\tilde{u}(a) = \tilde{u}(b) = 0$. Außerdem gilt*

$$\|\tilde{u}\|_{C^0(\overline{I})} \le \sqrt{b-a}\|u\|_{H^1(I)}.$$

Beweis. **1. Schritt:** Für eine klassisch stetig differenzierbare Funktion $v \in C_0^1(I)$ hat man für jeden Punkt $x \in I$

$$\begin{aligned} |v(x)| = |v(x) - v(a)| = |\int_a^x v'(s)\,ds| &\le \int_a^b |v'(s)|\,ds \\ &\le \sqrt{b-a}\left(\int_a^b |v'(s)|^2\,ds\right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

also folgt für die Maximumnorm

$$\|v\|_{C^0([a,b])} = \max_{x\in[a,b]} |v(x)| \le \sqrt{b-a}\|v\|_{H^1((a,b))}.$$

2. Schritt: Zu $u \in \mathring{H}^1(I)$ gibt es nach Definition eine Folge $(u_m) \subset C_0^1(I)$ mit $\|u_m - u\|_{H^1(I)} \to 0$ für $m \to \infty$. Aus dem ersten Schritt angewandt auf die Funktion $v = u_m - u_l$ erhält man

$$\|u_m - u_l\|_{C^0([a,b])} \le \sqrt{b-a}\|u_m - u_l\|_{H^1((a,b))}.$$

Also ist $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ auch eine Cauchyfolge im Banachraum $C^0(\overline{I})$. Aus den Grundvorlesungen wissen wir, dass es dann eine Funktion $\tilde{u} \in C^0(\overline{I})$ gibt, mit $\|u_m - \tilde{u}\|_{C^0(\overline{I})} \to 0$ für $m \to \infty$.
3. Schritt: $\tilde{u} = u$ fast überall, denn

$$\begin{aligned} \|\tilde{u} - u\|_{L^2(I)} &\le \|\tilde{u} - u_m\|_{L^2(I)} + \|u_m - u\|_{L^2(I)} \\ &\le \sqrt{b-a}\|\tilde{u} - u_m\|_{C^0(\overline{I})} + \|u_m - u\|_{H^1(I)} \to 0 \end{aligned}$$

für $m \to \infty$. Also ist $\|\tilde{u} - u\|_{L^2(I)} = 0$.
4. Schritt: Einbettungsabschätzung:

$$\|\tilde{u}\|_{C^0(\bar{I})} = \lim_{m\to\infty} \|u_m\|_{C^0(\bar{I})} \le \sqrt{b-a} \lim_{m\to\infty} \|u_m\|_{H^1(I)} = \sqrt{b-a}\|u\|_{H^1(I)}.$$

Dies gilt wegen der Stetigkeit der Norm in einem normierten Raum.
5. Schritt: Randwerte: $\tilde{u}(a) = \lim_{m\to\infty} u_m(a) = 0$ und dasselbe für b. □

Dieses Resultat besagt, dass wir in einer Raumdimension eine $H^1(I)$-Funktion u nur auf einer Menge vom Lebesguemaß Null abändern müssen, um eine stetige Funktion $\tilde{u}$ zu erhalten. Beachten wir, dass Funktionen in Sobolevräumen sowieso nur bis auf Nullmengen erklärt sind, so ist also in diesem Sinn $\tilde{u} = u$.

In höheren Raumdimensionen sind Sobolevfunktionen im Allgemeinen nicht stetig. Allerdings kann man ähnlich wie in Lebesgueräumen zeigen, dass sie durch glatte Funktionen approximiert werden können. Dies kann mit Hilfe eines Glättungsoperators bewiesen werden.

10.2 Definition. *Sei $\omega \in C_0^\infty(B_1(0))$ eine Funktion mit*

$$\int_{B_1(0)} \omega \, dx = 1$$

und $\omega(x) = \omega(|x|)$. Für $\varepsilon > 0$ setzen wir

$$\omega_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^n}\omega(\tfrac{x}{\varepsilon}) \in C_0^\infty(B_\varepsilon(0))$$

und definieren für Funktionen $u \in L^1(\Omega)$, die durch Null auf den gesamten $\mathbb{R}^n$ fortgesetzt werden,

$$u_\varepsilon(x) := (\omega_\varepsilon * u)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \omega_\varepsilon(x-y)u(y)\, dy. \tag{10.3}$$

Die Funktion u_ε nennen wir **Regularisierung** *von u.*

Wir wiederholen zuerst die Resultate für Lebesgueräume.

10.4 Satz. *Sei Ω ein Gebiet des $\mathbb{R}^n$ und sei $f \in L^1(\Omega)$. Dann gilt:*

(i) $f_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

(ii) *Falls* $\operatorname{supp}(f) \subseteq\subseteq \Omega$, *dann ist* $f_\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega)$ *für alle* $0 < \varepsilon < \operatorname{dist}(\operatorname{supp}(f), \partial\Omega)$.

(iii) *Falls* $f \in L^p(\Omega)$, *dann gilt* $f_\varepsilon \in L^p(\Omega)$ *und*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|f - f_\varepsilon\|_{L^p} = 0.$$

(iv) *Falls* $f \in C(\Omega)$, *dann gilt für alle* $K \subseteq\subseteq \Omega$

$$f_\varepsilon \rightrightarrows f \qquad \textit{in } K.$$

Beweis. Die Behauptungen (i)–(iii) wurden in Analysis III Kapitel 15 bewiesen.
(iv): Es gilt

$$\begin{aligned} f_\varepsilon(x) - f(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \omega_\varepsilon(x-y)(f(y) - f(x))\, dy \\ &\leq \sup_{|x-y|<\varepsilon} |f(y) - f(x)| \,. \end{aligned}$$

Wegen $K \subseteq\subseteq \Omega$ existiert $\varepsilon_0 > 0$, so dass $\operatorname{dist}(K, \partial\Omega) > \varepsilon_0$. Ist dann $x \in K$ und $\varepsilon < \frac{\varepsilon_0}{2}$, so folgt aus $|x-y| < \varepsilon$, dass $\operatorname{dist}(y, \partial\Omega) > \frac{\varepsilon_0}{2}$. Somit gilt

$$K_\varepsilon = \{y \in \Omega \,\big|\, |x-y| < \varepsilon \text{ für ein } x \in K\} \subseteq\subseteq \Omega,$$

woraus die gleichmäßige Stetigkeit von f auf K_ε folgt. Aus der ersten Abschätzung folgt dann $f_\varepsilon \rightrightarrows f$ in K. □

10.5 Satz. *Sei* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *eine offene Menge. Dann ist* $C_0^\infty(\Omega)$ *dicht in* $L^p(\Omega)$ *für* $1 \leq p < \infty$.

Beweis. Ana III Folgerung 15.6 □

Nun schauen wir uns den Fall der Sobolevräume an. Für Funktionen aus $\mathring{H}^{m,p}(\Omega)$ folgt aus der Definition 8.12 und Satz 10.4 sofort, dass $C_0^\infty(\Omega)$ dicht in $\mathring{H}^{m,p}(\Omega)$ ist. Das analoge Resultat für $H^{m,p}(\Omega)$ erfordert etwas mehr Arbeit.

10.6 Lemma. *Sei* Ω *ein Gebiet und* $G \subseteq\subseteq \Omega$. *Für* $u \in H^{1,p}(\Omega), 1 \leq p < \infty$, *und alle* $0 < \varepsilon < \operatorname{dist}(\partial\Omega, G)$ *gilt* $u_\varepsilon \in H^{1,p}(G) \cap C^\infty(\mathbb{R}^n)$. *Ferner gilt:*

$$u_\varepsilon \to u \qquad \textit{in } H^{1,p}(G)$$

für $\varepsilon \to 0$.

Beweis : Aus Satz 10.4 wissen wir, dass $u_\varepsilon \to u$ in $L^p(\Omega)$. Weiter gilt für alle $x \in G$ und $\varepsilon \in (0, \operatorname{dist}(\partial\Omega, G))$

$$\begin{aligned}\partial_i u_\varepsilon(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_i} \omega_\varepsilon(x-y)u(y)\,dy = -\int_{\mathbb{R}^n} \partial_{y_i} \omega_\varepsilon(x-y)u(y)\,dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \omega_\varepsilon(x-y)\partial_i u(y)\,dy = (\omega_\varepsilon * \partial_i u)(x) \\ &= (\partial_i u)_\varepsilon(x),\end{aligned}$$

wobei wir die Definition der schwachen Ableitung benutzt haben und auch $\partial_i u$ durch Null auf $\mathbb{R}^n$ fortgesetzt haben. Da $\partial_i u \in L^p(\Omega)$ ist, folgt auch $(\partial_i u)_\varepsilon = \partial_i u_\varepsilon \in L^p(G)$ und

$$\partial_i u_\varepsilon \to \partial_i u \qquad \text{in } L^p(G).$$

■

10.7 Satz. *Sei Ω ein beschränktes Gebiet und sei $u \in H^{1,p}(\Omega)$, $1 \le p < \infty$. Dann gibt es eine Folge $(u_n) \subseteq H^{1,p}(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$ mit*

$$u_n \to u \qquad \text{in } H^{1,p}(\Omega).$$

Beweis : Die Menge

$$U_j := \left\{ x \in \Omega \,\middle|\, \operatorname{dist}(\partial\Omega, x) > \frac{1}{j} \right\}$$

ist offen und

$$V_j := U_{j+3} \setminus \overline{U_{j+1}}$$

mit $V_0 := U_3$. Dann sind die V_j offen, es gilt

$$\Omega = \bigcup_{j=0}^{\infty} V_j$$

und alle Punkte $x \in \Omega$ sind nur in endlich vielen V_j enthalten. Wir benutzen eine Zerlegung der Eins, d.h.

$$\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j = 1, \quad 0 \le \beta_j \le 1 \;\text{ und }\; \beta_j \in C_0^\infty(V_j).$$

Betrachte $u_j = u\beta_j$. Es gilt $u_j \in H^{1,p}(\Omega)$, denn

$$\int_\Omega u\beta_j \partial_k \varphi \, dx = \int_\Omega u\partial_k(\beta_j\varphi) - u(\partial_k\beta_j)\varphi \, dx$$
$$= -\int_\Omega \partial_k u\beta_j\varphi + u\partial_k\beta_j\varphi \, dx.$$

Also ergibt sich

$$\partial_k(u\beta_j) = \partial_k u\beta_j + u\partial_k\beta_j \in L^p(\Omega)$$

und $\operatorname{supp}(u\beta_j) \subseteq V_j$. Sei $\delta > 0$, wähle $\varepsilon_j > 0$ klein genug und definiere

$$w_j := \omega_{\varepsilon_j} * (u\beta_j)\,,$$

so dass $\|w_j - u\beta_j\|_{H^{1,p}(\Omega)} \leq 2^{-(j+1)}\delta$ und $\operatorname{supp}(w_j) \subseteq V_{j+4} \setminus V_j$. Dies ist möglich nach Lemma 10.6. Setze

$$w := \sum_{j=0}^{\infty} w_j.$$

Für $x \in \Omega$ sind nur endlich viele Summanden ungleich Null. Da $w_j \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ist, ergibt sich $w \in C^\infty(\Omega)$. Für Punkte $x_0 \in \partial\Omega$ ist $B_R(x_0) \cap V_j \neq \emptyset$ für unendlich viele $j \in \mathbb{N}$. Also muss w nicht in $C^\infty(\overline{\Omega})$ liegen. Sei nun $K \subset\subset \Omega$ beliebig. Da in den Summen nur endlich viele Summanden ungleich Null sind, erhalten wir

$$\begin{aligned}
\|w - u\|_{H^{1,p}(K)} &= \Big\| \sum_{j=0}^{\infty} w_j - \sum_{j=0}^{\infty} u\beta_j \Big\|_{H^{1,p}(K)} \leq \sum_{j=0}^{\infty} \|w_j - u\beta_j\|_{H^{1,p}(K)} \\
&\leq \sum_{j=0}^{\infty} \|w_j - u\beta_j\|_{H^{1,p}(\Omega)} \leq \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-(j+1)}\delta \\
&\leq \delta.
\end{aligned}$$

Wenn wir nun Ω durch eine monoton wachsende Folge K_i, $i \in \mathbb{N}$, ausschöpfen, erhalten wir mit dem Satz von Levi über monotone Konvergenz

$$\int_\Omega |w-u|^p + |\nabla w - \nabla u|^p \, dx = \lim_{i\to\infty} \int_\Omega \chi_{K_i}\big(|w-u|^p + |\nabla w - \nabla u|^p\big)\, dx \leq \delta\,.$$

Da $\delta > 0$ belliebig war, folgt die Behauptung. ∎

10.8 Satz. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit Rand $\partial\Omega \in C^1$. Sei $u \in H^{1,p}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$. Dann existieren Funktionen $u_n \in C^\infty(\overline{\Omega})$ mit*

$$u_n \to u \qquad \text{in } H^{1,p}(\Omega).$$

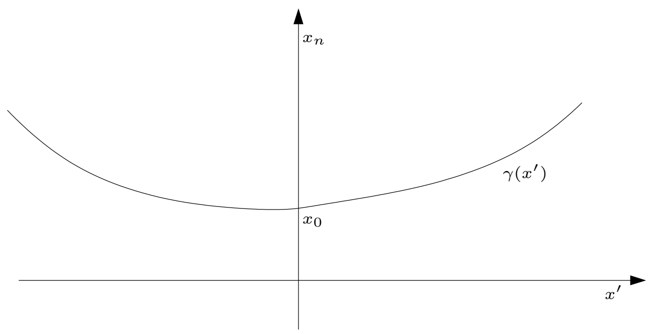
Die Aussage des Satzes ist auch richtig, wenn der Rand nur Lipschitz-stetig ist, d.h. $\partial G \in C^{0,1}$.

Beweis : (1) Da Ω einen C^1-Rand hat, wissen wir aus Ana III, dass es eine Funktion $\gamma \in C^1(\mathbb{R}^{n-1})$ gibt, so dass sich der Rand von Ω lokal durch γ darstellen lässt, d.h.

$$\partial\Omega \cap B_r(x_0) = \operatorname{graph}(\gamma) \cap B_r(x_0).$$

Dann ergibt sich

$$\Omega \cap B_r(x_0) = \{x \in B_r(x_0) \,\big|\, x_n > \gamma(x_1, \dots, x_{n-1})\}.$$



Zur Vereinfachung schreiben wir $x = (x_1, \dots, x_n) =: (x', x_n)$. Sei

$$V := B_{\frac{r}{2}}(x_0) \cap \Omega.$$

Da $u \in H^{1,p}(\Omega)$ nur in Ω definiert ist kann man nicht um Randpunkte glätten. Die Idee ist daher, dass wir die Funktion vom Rand weg nach innen verschieben. Dazu definieren wir für $x \in V$, $\varepsilon > 0$, $\lambda > 2$

$$x^\varepsilon := x + (0, \dots, 0, \lambda\varepsilon) = (x', x_n + \lambda\varepsilon).$$

Wähle $0 < \varepsilon < \frac{r}{16}$ und $\lambda = \frac{r}{4}\frac{1}{\varepsilon}$. Dann erhalten wir $B_\varepsilon(x^\varepsilon) \subseteq B_r(x_0)$ für alle $x \in B_{\frac{r}{2}}(x_0) \cap \Omega$. Setze $u^\varepsilon(x) := u(x^\varepsilon)$ für alle $x \in V$ und

$$w^\varepsilon(x) := (\omega_\varepsilon * u^\varepsilon)(x).$$

Dann ist w^ε in $\overline{V}$ vollständig durch $u|_{B_r(x_0)\cap\Omega}$ bestimmt. Insbesondere ist $w^\varepsilon \in C^\infty(\overline{V})$ und es gilt

$$w^\varepsilon \to u \qquad \text{in } W^{1,p}(V), \tag{10.9}$$

denn

$$\begin{aligned}\|w^\varepsilon - u\|_{L^p(V)} &\le \|w^\varepsilon - u^\varepsilon\|_{L^p(V)} + \|u^\varepsilon - u\|_{L^p(V)} \\ &=: I_1^\varepsilon + I_2^\varepsilon.\end{aligned}$$

Aus Ana III wissen wir, dass Translationen stetig in L^p sind, d.h.

$$I_2^\varepsilon = \|u^\varepsilon - u\|_{L^p(V)} \to 0.$$

Um zu zeigen, dass $I_1^\varepsilon \to 0$ konvergiert, benutzen wir dass C_0^∞-Funktionen in L^p dicht sind. Es gibt also ein $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ mit $\|\phi - u\|_{L^p(\Omega)} \le \frac{1}{n}$. Dann gilt auch für die Translationen $\phi^\varepsilon, u^\varepsilon$

$$\|\phi^\varepsilon - u^\varepsilon\|_{L^p(V)} \le \frac{1}{n}.$$

I_1^ε lässt sich schreiben als

$$\begin{aligned}\|w^\varepsilon - u^\varepsilon\|_{L^p(V)} &= \|\omega_\varepsilon * u^\varepsilon - u^\varepsilon\|_{L^p(V)} \\ &\le \|\omega_\varepsilon * u^\varepsilon - \omega_\varepsilon * \phi^\varepsilon\|_{L^p(V)} + \|\omega_\varepsilon * \phi^\varepsilon - \phi^\varepsilon\|_{L^p(V)} \\ &\quad + \|\phi^\varepsilon - u^\varepsilon\|_{L^p(V)}.\end{aligned}$$

Wiederum aus Ana III wissen wir, dass gilt

$$\|\omega_\varepsilon * g\|_{L^p(V)} \le \|g\|_{L^p(\tilde{V})},$$

wobei $\tilde{V}$ eine entsprechend zu definierende Menge ist. Wähle $g = u^\varepsilon - \phi^\varepsilon$, dann erhält man

$$\|\omega_\varepsilon * u^\varepsilon - \omega_\varepsilon * \phi^\varepsilon\|_{L^p(V)} \le \|u^\varepsilon - \phi^\varepsilon\|_{L^p(\tilde{V})} \le \frac{1}{n}.$$

Da ϕ gleichmäßig stetig auf kompakten Mengen ist, erhalten wir

$$\begin{aligned}|\omega_\varepsilon * \phi^\varepsilon(x) - \phi^\varepsilon(x)| &= \left| \int\limits_{\mathbb{R}^n} \omega_\varepsilon(x-y)(\phi^\varepsilon(y) - \phi^\varepsilon(x))\, dy \right| \\ &\le \int\limits_{|x-y|\le\varepsilon} \omega_\varepsilon(x-y)|\phi^\varepsilon(x) - \phi^\varepsilon(y)|\, dy \\ &\le \sup_{|x-y|\le\varepsilon} |\phi^\varepsilon(x) - \phi^\varepsilon(y)| \\ &\le \sup_{|x-y|<\varepsilon,\, x,y\in\overline{B_r(x_0)\cap\Omega}} |\phi(x) - \phi(y)| < \frac{1}{n}\end{aligned}$$

für ε klein genug. Wir haben also gezeigt, dass

$$I_1^\varepsilon = \|w^\varepsilon - u^\varepsilon\|_{L^p(V)} < \frac{3}{n}$$

ist und insgesamt

$$\|w^\varepsilon - u\|_{L^p(V)} \leq I_1^\varepsilon + I_2^\varepsilon \to 0 \qquad (\varepsilon \to 0).$$

Ein analoges Vorgehen für $\nabla w^\varepsilon = \nabla(\omega_\varepsilon * u^\varepsilon) = \omega_\varepsilon * (\nabla u^\varepsilon)$ liefert

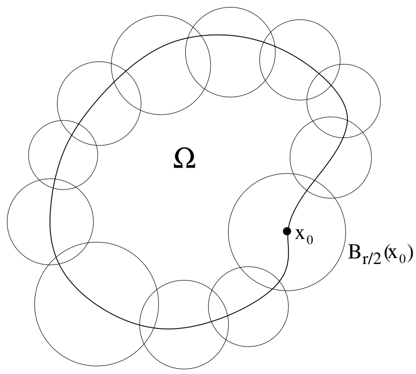
$$\|\nabla w^\varepsilon - \nabla u^\varepsilon\|_{L^p(V)} \to 0,$$

d.h. (10.9) gilt.

(2) Da der $\partial\Omega$ kompakt ist, gibt es Punkte $x_i \in \partial\Omega$, $i = 1, \ldots, N$ und Mengen

$$V_i := B_{\frac{r_i}{2}}(x_i) \cap \Omega,$$

so dass gilt $\partial\Omega \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} B_{\frac{r_i}{2}}(x_i)$.



Für $\delta > 0$ gibt es nach (1) Funktionen $w_i \in C^\infty(\overline{V_i})$ mit

$$\|w_i - u\|_{H^{1,p}(V_i)} \leq \delta.$$

Wähle $V_0 \subseteq\subseteq \Omega$, so dass sich ergibt

$$\Omega \subseteq \bigcup_{i=0}^{N} V_i.$$

Nach Lemma 10.6 gibt es ein $w_0 \in C^\infty(\overline{\Omega})$ mit

$$\|u - w_0\|_{H^{1,p}(V_0)} \leq \delta.$$

Wählt man eine Zerlegung der Eins λ_i, $i = 1, \dots, N$, bezüglich der Überdeckung V_i, dann ist

$$w = \sum_{i=0}^{N} \lambda_i w_i \in C^\infty(\overline{\Omega})$$

und man erhält

$$\begin{aligned}\|u - w\|_p &= \| \sum_{i=0}^{N} \lambda_i u - \sum_{i=0}^{N} \lambda_i w_i\|_p \le \sum_{i=0}^{N} \|\lambda_i\|_\infty \|u - w_i\|_{L^p(V_i)} \\ &\le (N+1)\delta\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}\|\nabla u - \nabla w\|_p &= \Big\|\nabla\Big(\sum_{i=0}^{N} \lambda_i u\Big) - \nabla\Big(\sum_{i=0}^{N} \lambda_i w_i\Big)\Big\|_p \\ &= \sum_{i=0}^{N} \|\nabla \lambda_i\|_\infty \|u - w_i\|_{L^p(V_i)} + \|\lambda_i\|_\infty \|\nabla u - \nabla w_i\|_{L^p(V_i)} \\ &\le c \sum_{i=0}^{N} \|u - w_i\|_{H^{1,p}(V_i)} \\ &\le c(N+1)\delta,\end{aligned}$$

d.h.

$$\|u - w\|_{1,p} \le c\,\delta.$$

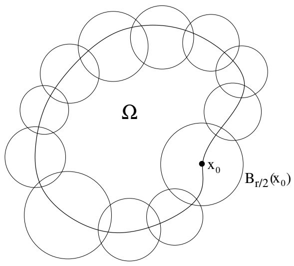
■

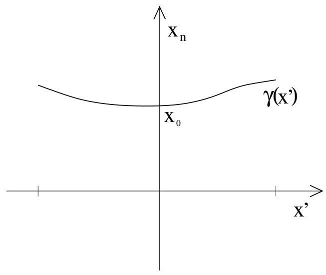
Wir haben also gezeigt, dass in beliebigen Dimensionen eine beliebige Sobolevfunktion durch glatte Funktionen approximiert werden kann. Wir wollen nun noch die Frage klären, ob man für Sobolevfunktionen im Allgemeinen Randwerte erklären kann. Sei Ω ein beschränktes Gebiet des $\mathbb{R}^n$ mit $\partial\Omega \in C^1$. Jede Funktion $u \in C^1(\overline{\Omega})$ besitzt eine Restriktion $\tilde{R}u$ auf $\partial\Omega$, die definiert wird durch

$$(\tilde{R}u)(z) := u(z)\,, \qquad z \in \partial\Omega\,. \tag{10.10}$$

10.11 Lemma. *Sei Ω ein beschränktes Gebiet des $\mathbb{R}^n$ mit $\partial\Omega \in C^1$. Dann gibt es eine Konstante K, die nur von Ω abhängt so, dass für alle $u \in C^1(\overline{\Omega})$ gilt:*

$$\|\tilde{R}u\|_{L^p(\partial\Omega)} \le K \|u\|_{H^{1,p}(\Omega)}\,.$$





Beweis : Da $\partial\Omega \in C^1$ gibt es für jeden Punkt x_0 des Randes einen Ball $B_r(x_0) \subset \mathbb{R}^n$, so dass der Rand lokal durch eine C^1–Funktion $\gamma(x')$ beschrieben werden kann. Wir benutzen weiterhin die Notation $x = (x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) = (x', x_n)$.

(a) Sei $x_0 \in \partial\Omega$ und sei der Rand nahe x_0 flach, d.h. es gibt ein $r > 0$ so, dass $\partial\Omega \cap B_r(x_0) \subset \{(x', x_n) \,\big|\, x_n = 0\}$. Sei $B^+ := B_r(x_0) \cap \{x_n \geq 0\} \subseteq \overline{\Omega}$ und sei τ eine Abschneidefunktion, d.h. $\tau \in C_0^\infty(B_r(x_0))$ mit $\tau = 1$ in $B_{r/2}(x_0)$ und $0 \leq \tau \leq 1$. Dann gilt:

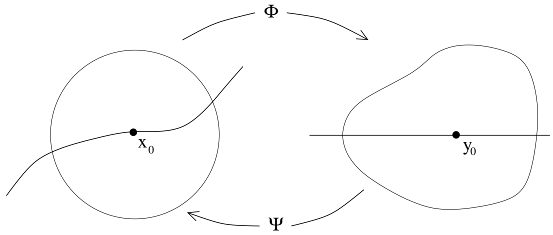
$$\begin{aligned}
\int\limits_{B_{r/2}(x_0)\cap\partial\Omega} |u|^p \, dx' \leq \int\limits_{\{x_n=0\}} |u|^p \, \tau \, dx' &= \int\limits_{B_r^+(x_0)} \partial_{x_n}\big(|u|^p \, \tau\big) \, dx \\
&= \int\limits_{B_r^+(x_0)} |u|^p \, \partial_{x_n}\tau + p\,|u|^{p-1} \operatorname{sign}(u)\big(\partial_{x_n} u\big) \, \tau \, dx \\
&\leq c(r,p) \int\limits_{B_r^+(x_0)} |u|^p + |\nabla u|^p \, dx \,,
\end{aligned}$$

wobei wir in der letzten Zeile die Young-Ungleichung benutzt haben.

(b) Sei nun der Rand nahe x_0 nicht flach und lokal durch $\gamma \in C^1(\mathbb{R}^{n-1})$ beschrieben. Wir benutzen die Transformation $x \mapsto y = \Phi(x)$, wobei

$$\begin{aligned}
\Phi_i(x) &= y_i = x_i \,, \qquad i = 1, \ldots, n-1 \,, \\
\Phi_n(x) &= y_n = x_n - \gamma(x') \,,
\end{aligned}$$

hat das Bild $\Phi(B_r(x_0) \cap \partial\Omega)$ einen flachen Rand nahe y_0 bzgl. der y-Koordinaten.



Für die Umkehrabbildung $x = \Psi(y)$ und die Transformation Φ gilt $\det(\nabla_x \Phi) = \det(\nabla_y \Psi) = 1$. Somit gilt für $\tilde{u}(y) := u(\Psi(y))$ unter Berücksichtigung von (a) und $\gamma \in C^1$

$$\begin{aligned}
\int\limits_{B_{r/2}(x_0)\cap\partial\Omega} |u|^p \, do &= \int\limits_{\Phi(B_{r/2}(x_0)\cap\partial\Omega)} |\tilde{u}|^p \sqrt{1 + |\nabla_{y'}\gamma(y')|^2} \, dy' \\
&\le c \int\limits_{\Phi(B_r(x_0)\cap\Omega)} |\tilde{u}|^p + |\nabla_y \tilde{u}|^p \, dy \\
&\le c \int\limits_{B_r(x_0)\cap\Omega} |u|^p + |\nabla_x u|^p |\nabla_y \Psi(\Phi(x))|^p \, dx \\
&\le c \int\limits_{B_r(x_0)\cap\Omega} |u|^p + |\nabla_x u|^p \, dx \, .
\end{aligned}$$

(c) Da $\partial\Omega$ kompakt ist, existieren endlich viele Punkte $x_0^i \in \partial\Omega$, $i = 1, \dots, N$ so, dass $\partial\Omega = \cup_{i=1}^N \partial\Omega \cap B_{r^i/2}(x_0^i)$, wobei für jedes $i = 1, \dots, N$ der Rand nahe x_0^i durch eine Funktion γ^i (siehe (b)) beschrieben ist. Eine wiederholte Anwendung von (b) liefert

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\partial\Omega} |u|^p \, do &\le \sum_{i=1}^N \int\limits_{B_{r^i/2}(x_0^i)\cap\partial\Omega} |u|^p \, do \\
&\le c \sum_{i=1}^N \int\limits_{B_{r^i}(x_0^i)\cap\Omega} |u|^p + |\nabla u|^p \, dx \\
&\le c \int\limits_{\Omega} |u|^p + |\nabla u|^p \, dx \, ,
\end{aligned}$$

was gerade die Behauptung von Lemma 10.11 ist. ■

Der Operator $\tilde{R}$ lässt sich durch Abschliessung auf ganz $H^{1,p}(\Omega)$ zu einer beschränkten linearen Abbildung

$$R : H^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$$

fortsetzen. Für $u \in H^{1,p}(\Omega)$ existiert $(u_n) \subseteq C^1(\overline{\Omega})$ mit $u_n \to u$ in $H^{1,p}(\Omega)$ (Satz 10.8). Da $\tilde{R}$ linear und stetig ist, ist

$$Ru = \lim_{n\to\infty} \tilde{R} u_n$$

wohldefiniert. R heißt **Restriktions- oder Spuroperator**. Die Abbildung R wird verwendet, um Elementen von $H^{1,p}(\Omega)$, die eigentlich Klassen von Funktionen sind, die bis auf eine Menge von Maß Null erklärt sind, dennoch eine Restiktion auf die Menge $\partial\Omega$, welche Maß Null hat, zuzuordnen.

10.12 Satz. *Sei Ω ein beschränktes Gebiet mit C^1-Rand. Dann existiert ein linearer, stetiger Operator*

$$R : H^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega),$$

der für Funktionen aus $C^1(\overline{\Omega})$ mit dem Restriktionsoperator $\tilde{R}$ aus (10.10) übereinstimmt.

Beweis. Vorher. □

10.13 Satz. *Sei Ω ein beschränktes Gebiet mit C^1-Rand. Eine Funktion $u \in H^{1,p}(\Omega)$ gehört zu $\overset{\circ}{H}{}^{1,p}(\Omega)$ genau dann, wenn für ihre Spur gilt*

$$Ru = 0.$$

Beweis. "⇒" Zu $u \in \overset{\circ}{H}{}^{1,p}(\Omega)$ existiert $u_n \in C_0^\infty(\Omega)$ mit $u_n \to u$ in $H^{1,p}(\Omega)$. Dann gilt $0 = Ru_n \to Ru$.
"⇐" Schwer. Details Evans. Idee vom Rand wegschieben. □

Die Aussagen der vorherigen beiden Sätze und des folgenden Satzes sind auch richtig, wenn der Rand nur Lipschitz-stetig ist, d.h. $\partial\Omega \in C^{0,1}$.

Als letztes wollen wir zeigen, dass man eine Sobolev-Funktion über ein gegebenes Gebiet Ω hinaus als Sobolev-Funktion fortsetzen kann.

10.14 Satz. *Sei Ω ein beschränktes Gebiet des $\mathbb{R}^n$ mit $\partial\Omega \in C^1$ und G eine offene Menge mit $\Omega \subseteq\subseteq G$. Dann gibt es einen beschränkten, linearen* **Fortsetzungsoperator** *E, so dass für alle $p \in [1,\infty)$*

$$E : H^{1,p}(\Omega) \to H^{1,p}(\mathbb{R}^n),$$

und für alle $u \in H^{1,p}(\Omega)$ gilt:

(i) *$Eu = u$ fast überall in Ω,*

(ii) $\operatorname{supp} Eu \subseteq G$,

(iii) $\|Eu\|_{H^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \le c\, \|u\|_{H^{1,p}(\Omega)}$,

wobei c nur von p, Ω und G abhängt.

Beweis : Da Ω einen C^1-Rand hat, gibt es für alle $x_0 \in \partial\Omega$ ein $r > 0$, so dass sich der Rand von Ω in $B_r(x_0)$ durch eine C^1-Funktion γ darstellen lässt (vgl. Abb. 1).

(a) Wir behandeln zuerst den Fall, dass der Rand flach nahe x_0 ist, d.h. es gibt ein $r > 0$, so dass

$$\partial\Omega \cap B_r(x_0) \subset \big\{(x', x_n) \,\big|\, x_n = 0\big\}.$$

Wir bezeichnen wieder $B := B_r(x_0), B^+ := B \cap \{x_n \geq 0\} \subseteq \overline{\Omega}$, $B^- := B \cap \{x_n \leq 0\} \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \Omega$. Nun setzen wir $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$ durch eine gerade Reflektion höherer Ordnung an der Geraden zwischen B^+ und B^- lokal fort durch

$$\overline{u}(x) := \begin{cases} u(x) & x \in B^+\,, \\ -3u(x', -x_n) + 4u(x', -\frac{x_n}{2}) & x \in B^-\,. \end{cases} \tag{10.15}$$

Um zu beweisen, dass $u \in C^1(\overline{B})$ bezeichnen wir

$$u^- := \overline{u}\,\big|_{B^-} \qquad u^+ := \overline{u}\,\big|_{B^+}.$$

Dann ist $u^- = u^+$ auf $\{x_n = 0\}$ und auch $\partial_i u^- = \partial_i u^+$ für $i = 1, \dots, n-1$ auf $\{x_n = 0\}$. Außerdem gilt

$$\partial_n u^- = 3\partial_n u(x', -x_n) + 4\partial_n u(x', -\frac{x_n}{2})(-\frac{1}{2}) = \partial_n u^+$$

auf $\{x_n = 0\}$. Insgesamt also

$$u^+ = u^- \text{ und } \nabla u^+ = \nabla u^- \text{ auf } \{x_n = 0\},$$

d.h. $u \in C^1(\overline{B})$. Weiter gilt

$$\int\limits_B |\overline{u}|^p\,dx = \int\limits_{B^+} |u|^p\,dx + \int\limits_{B^-} |\overline{u}|^p\,dx \leq c(p) \int\limits_{B^+} |u|^p\,dx$$

und

$$\int\limits_B |\nabla\overline{u}|^p\,dx = \int\limits_{B^+} |\nabla u|^p\,dx + \int\limits_{B^-} |\nabla\overline{u}|^p\,dx \leq c(p) \int\limits_{B^+} |\nabla u|^p\,dx,$$

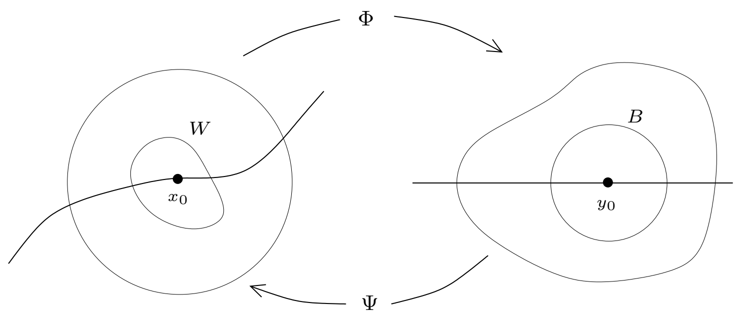
d.h.

$$\|\overline{u}\|_{H^{1,p}(B)} \leq c\|u\|_{H^{1,p}(B^+)}. \tag{10.16}$$

(b) Nun kommen wir zum allgemeinen Fall, d.h. der Rand von Ω ist nicht flach nahe x_0. Sei der Rand nahe x_0 durch $\gamma \in C^1(\mathbb{R}^{n-1})$ beschrieben. Durch die Transformation $x \mapsto y = \Phi(x)$, wobei

$$\begin{aligned} \Phi_i(x) &= y_i = x_i\,, \qquad\qquad i = 1, \dots, n-1\,, \\ \Phi_n(x) &= y_n = x_n - \gamma(x')\,, \end{aligned} \tag{10.17}$$

hat das Bild $\Phi(B_r(x_0) \cap \partial\Omega)$ einen flachen Rand nahe y_0 bzgl. der y-Koordinaten (vgl. Plättbarkeitskriterium aus Ana III).



Sei $x = \Psi(y)$ die Umkehrabbildung. Wir haben $\det(\nabla_x \Phi) = \det(\nabla_y \Psi) = 1$. Wir setzen für $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$

$$u'(y) = u(\Psi(y)).$$

Da $\Phi(B_r(x_0))$ kein Ball mehr ist, wählen wir uns einen neuen Ball B um $y_0 = \Phi(x_0)$, der in $\Phi(B)$ liegt. Wie in (a) erweitern wir u' von B^+ auf B^- und nennen die neue Funktion $\overline{u}'$. Aus (10.16) folgt dann

$$\|\overline{u}'\|_{H^{1,p}(B)} \le c\|u'\|_{H^{1,p}(B^+)}. \tag{10.18}$$

Sei $W := \Psi(B)$, also das Urbild des Balles B um y_0. Für $x \in W$ definieren wir

$$\overline{u}(x) = \overline{u}'(\Phi(x))$$

und erhalten durch Transformation

$$\int\limits_W |\overline{u}(x)|^p \, dx = \int\limits_{\Psi(B)} |\overline{u}'(\Phi(x))|^p \, dx = \int\limits_B |\overline{u}'(y)|^p \det \nabla_y \Psi \, dy,$$

sowie

$$\begin{aligned}
\int\limits_W |\nabla_x \overline{u}(x)|^p\,dx &= \int\limits_{\Psi(B)} |\nabla_x \overline{u}'(\Phi(x))|^p\,dx \\
&= \int\limits_{\Psi(B)} |\nabla_y \overline{u}'(\Phi(x))|^p |\nabla_x \Phi(x)|^p\,dx \\
&= \int\limits_B |\nabla_y \overline{u}'(y)|^p |\nabla_x \Phi(\Psi(y))|^p \det(\nabla_y \Psi(y))\,dy \\
&\le c(\gamma,p) \int\limits_B |\nabla_y \overline{u}'(y)|^p\,dy\,.
\end{aligned}$$

Mithilfe von (10.18) und einer analogen Rechnung erhalten wir

$$\begin{aligned}
\|\overline{u}\|_{H^{1,p}(W)} &\le c\,\|\overline{u}'\|_{H^{1,p}(B)} \\
&\le c\,\|u'\|_{H^{1,p}(B^+)} \\
&\le c\,\|u\|_{H^{1,p}(W^+)} \\
&\le c\,\|u\|_{H^{1,p}(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Insgesamt haben wir gezeigt:

$$\|\overline{u}\|_{H^{1,p}(W)} \le c\|u\|_{H^{1,p}(\Omega)}. \tag{10.19}$$

(c) Sei $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$. Da der Rand von Ω kompakt ist, gibt es eine endliche Überdeckung mit Mengen W_i, $i = 1, \dots, N$, wobei $W_i \subseteq\subseteq G$. Sei u_i die Fortsetzung von u auf W_i. Sei $W_0 \subseteq\subseteq \Omega$ so dass $\Omega \subseteq \bigcup\limits_{i=0}^{N} W_i$. Außerdem seien λ_i eine Zerlegung der Eins. Setze nun

$$\overline{u} = \sum_{i=0}^{N} \lambda_i u_i$$

wobei $u_0 = u$. Dann ergibt sich mit (10.19)

$$\|\overline{u}\|_{H^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \le c\|u\|_{H^{1,p}(\Omega)}. \tag{10.20}$$

(d) Für $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$ setze $Eu = \overline{u}$. Zu $u \in H^{1,p}(\Omega)$ gibt es nach Satz 10.8 eine Folge $u_n \in C^\infty(\overline{\Omega})$ mit

$$u_n \to u \qquad \text{in } H^{1,p}(\Omega).$$

Es ist

$$\|Eu_k - Eu_n\|_{H^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq c\|u_n - u_k\|_{H^{1,p}(\Omega)},$$

d.h. (Eu_n) ist Cauchyfolge in $H^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ und somit

$$Eu_n \to v =: Eu.$$

■

- Der Satz gilt auch für den Fall $p = \infty$.

Kapitel 2

Finite Elemente

2.1 Das Ritz–Galerkin–Verfahren

In den vorangegangenen Abschnitten haben wir gesehen, dass die Lösung u der Poissongleichung zu Nullrandwerten durch das Minimieren des Funktionals

$$I(v) = \int_G \frac{1}{2} |\nabla v|^2 \, dx - f(v) \tag{1.1}$$

über dem Sobolevraum $X = \mathring{H}^1(G)$ gefunden werden konnte:

$$d = I(u) = \inf_{v \in X} I(v).$$

Dieses u ist dann eine schwache Lösung gemäß Definition 1.9.5.

Die Idee des Ritz–Galerkin–Verfahrens ist nun ganz einfach. Man wähle einen endlichdimensionalen Teilraum $X_h \subset X$ und löse folgendes Variationsproblem: Finde ein $u_h \in X_h$, so dass

$$d_h = I(u_h) = \inf_{v_h \in X_h} I(v_h). \tag{1.2}$$

(Die Wahl geeigneter X_h mit praktisch gut zu verarbeitenden Basen wird Gegenstand der nächsten Paragraphen sein.) Offensichtlich ist $I(u) \leq I(u_h)$. Ist $u_h \in X_h$ eine Lösung des Variationsproblems (1.2), so folgt wie im unendlichdimensionalen Fall wegen $I(u_h) \leq I(u_h + \varepsilon \varphi_h)$ für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}$ und jedes $\varphi_h \in X_h$ die „schwache diskrete Differentialgleichung“

$$\int_G \nabla u_h \cdot \nabla \varphi_h \, dx = f(\varphi_h) \quad \forall \varphi_h \in X_h. \tag{1.3}$$

Fassen wir dies in einem Lemma zusammen.

1.4 Lemma. *Es sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und $f \in H^{-1}(G)$. Ist nun $X_h \subset X = \mathring{H}^1(G)$ ein endlichdimensionaler Teilraum, dann gibt es genau eine diskrete Lösung $u_h \in X_h$, so dass (1.2) gilt, und*

$$\int_G \nabla u_h \cdot \nabla \varphi_h \, dx = f(\varphi_h) \quad \forall \varphi_h \in X_h. \tag{1.5}$$

Ausserdem ist $d_h \geq d$.

Beweis. Der Beweis ist wörtlich derselbe wie der Beweis zu Satz 1.9.4. Nur ist der Beweis einfacher, da wir in dem endlichdimensionalen Raum X_h minimieren und ein solcher Raum immer vollständig ist. □

Die diskrete Differentialgleichung (1.5) ist ein lineares Gleichungssystem zur Bestimmung von $u_h \in X_h$. Um dies einzusehen stellen wir u_h durch eine Basis dar. Sei

$$X_h = \operatorname{span}\{\phi_1, \ldots, \phi_N\}.$$

Demnach lässt sich u_h schreiben als

$$u_h(x) = \sum_{j=1}^{N} u_j \phi_j(x), \quad x \in G \tag{1.6}$$

mit zu bestimmenden reellen Zahlen u_j. Aus diesen Koeffizienten bilden wir den Vektor

$$\underline{u} = (u_1, \ldots, u_N).$$

Die Gleichung (1.5) ist äquivalent zu

$$\int_G \nabla u_h \cdot \nabla \phi_i \, dx = f(\phi_i) \quad (i = 1, \ldots, N).$$

Mit der Darstellung (1.6) ist dies äquivalent zu

$$\sum_{j=1}^{N} u_j \int_G \nabla \phi_j \cdot \nabla \phi_i \, dx = f(\phi_i), \quad (i = 1, \ldots, N), \tag{1.7}$$

und wenn wir die sogenannte **Steifigkeitsmatrix** mit

$$S_{ij} = \int_G \nabla \phi_j \cdot \nabla \phi_i \, dx, \quad (i, j = 1, \ldots, N) \tag{1.8}$$

bezeichnen und die rechte Seite mit

$$\underline{f} = (f_1, \ldots, f_N), f_i = f(\phi_i) \ (i = 1, \ldots, N), \tag{1.9}$$

so ist (1.5) äquivalent zum linearen Gleichungssystem

$$S\underline{u} = \underline{f}.$$

Dieses Gleichungssystem hat nun wichtige Eigenschaften.

1.10 Lemma. *Die Steifigkeitsmatrix S ist symmetrisch und positiv definit.*

Beweis. Die Symmetrie ist offensichtlich. Sei $\xi \in \mathbb{R}^N$. Setze $v_h(x) = \sum_{j=1}^N \xi_j \phi_j(x)$ und erhalte

$$S\xi \cdot \xi = \sum_{i,j=1}^N S_{ij}\xi_j\xi_i = \int_G |\nabla v_h|^2\, dx \geq \frac{1}{c_P^2}\int_G |v_h|^2\; dx.$$

Dabei haben wir im letzten Schritt die Poincarésche Ungleichung verwendet. Offensichtlich ist dieser Ausdruck nicht negativ und gleich Null genau dann, wenn $v_h = 0$ ist, d.h. v_h identisch verschwindet. Daraus folgt dann aber, dass $\xi = 0$ ist. □

Wegen der besonders einfachen mathematischen Struktur der Diskretisierung können wir den Fehler zwischen kontinuierlicher Lösung und diskreter Lösung leicht abschätzen.

1.11 Satz (Céa Lemma). *Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, $f \in H^{-1}(G)$ und $X_h \subset \mathring{H}^1(G)$ ein endlichdimensionaler Teilraum. Ist $u \in \mathring{H}^1(G)$ die kontinuierliche Lösung und $u_h \in X_h$ die diskrete Lösung, so gilt*

$$\|\nabla(u - u_h)\|_{L^2(G)} \leq \inf_{\varphi_h \in X_h} \|\nabla(u - \varphi_h)\|_{L^2(G)}. \tag{1.12}$$

Damit ist die Abschätzung des Fehlers zwischen kontinuierlicher Lösung und diskreter Lösung auf ein Approximationsproblem zurückgeführt - das uns aber noch beträchtliche Arbeit abverlangen wird.

Beweis. Die Funktion $u \in \mathring{H}^1(G)$ ist die kontinuierliche Lösung, d.h.

$$\int_G \nabla u \cdot \nabla\varphi\, dx = f(\varphi) \quad \forall \varphi \in \mathring{H}^1(G) \tag{1.13}$$

und $u_h \in X_h$ ist die diskrete Lösung, d.h.

$$\int_G \nabla u_h \cdot \nabla\varphi_h\, dx = f(\varphi_h) \quad \forall \varphi_h \in X_h. \tag{1.14}$$

Wegen $X_h \subset \mathring{H}^1(G)$ dürfen wir in der ersten Gleichung (1.13) auch diskrete Funktionen $\varphi = \varphi_h$ als Testfunktionen einsetzen. Wir subtrahieren danach die Gleichungen (1.13) und (1.14) und erhalten die **Orthogonalität des Fehlers**:

$$\int_G \nabla(u - u_h) \cdot \nabla\varphi_h\, dx = 0 \quad \forall \varphi_h \in X_h\,. \tag{1.15}$$

Nun folgt weiter für jedes $\varphi_h \in X_h$:

$$\begin{aligned}\|\nabla(u-u_h)\|^2_{L^2(G)} &= \int_G \nabla(u-u_h)\cdot\nabla u\,dx - \int_G \nabla(u-u_h)\cdot\nabla u_h\,dx \\ &= \int_G \nabla(u-u_h)\cdot\nabla u\,dx - \int_G \nabla(u-u_h)\cdot\nabla \varphi_h\,dx \\ &= \int_G \nabla(u-u_h)\cdot\nabla(u-\varphi_h)\,dx \\ &\le \|\nabla(u-u_h)\|_{L^2(G)}\|\nabla(u-\varphi_h)\|_{L^2(G)}.\end{aligned}$$

Und das ergibt dann

$$\|\nabla(u-u_h)\|_{L^2(G)} \le \|\nabla(u-\varphi_h)\|_{L^2(G)}$$

für jedes φ_h, also die Behauptung des Satzes. □

2.2 Simplexe

Ziel dieses Abschnitts ist die Konstruktion geeigneter endlichdimensionaler Teilräume X_h, die auf einer simplizialen Triangulierung des Gebietes G beruhen. In zwei Raumdimensionen besteht das Rechengitter aus Dreiecken, in drei Raumdimensionen aus Tetraedern.

2.1 Definition. *1. Für $s \in \{1,\dots,n\}$ seien $a_0,\dots,a_s \in \mathbb{R}^n$ derart, dass $(a_j - a_0)_{j=1,\dots,s}$ linear unabhängig sind. Dann heißt*

$$T = \{x \in \mathbb{R}^n |\ x = \sum_{j=0}^{s} \lambda_j a_j, \quad 0 \le \lambda_j \le 1, \quad \sum_{j=0}^{s} \lambda_j = 1\}$$

*ein (nicht degeneriertes) s–**dimensionales Simplex** im $\mathbb{R}^n$. Die Punkte $a_0,\dots,a_s$ heißen **Ecken** des Simplex. Sind nun $a'_0,\dots,a'_r \in \{a_0,\dots,a_s\}$ ($r \in \{0,\dots,s\}$), so nennt man*

$$T' = \{x \in \mathbb{R}^n |\ x = \sum_{j=0}^{r} \lambda_j a'_j, \quad 0 \le \lambda_j \le 1, \quad \sum_{j=0}^{r} \lambda_j = 1\}$$

*r–**dimensionales Seitensimplex** von T. Die eindimensionalen Seitensimplexe heißen **Kanten**, die nulldimensionalen **Ecken**.*

*2. Das Simplex T_0 zu $a_0 = e_0 := 0$, $a_j = e_j$ ($j = 1,\dots,n$) nennt man n–**dimensionales Einheitssimplex**.*

3. $h(T) = \max\{|a_j - a_k|;\ (j,k = 0,\dots,s)\}$ *heißt* **Durchmesser** *des s–dimensionalen Simplex,* $\rho(T) = 2\sup\{R \mid B_R(x_0) \subset T\}$ *heißt* **Inkugeldurchmesser***; den Quotienten bezeichnen wir mit* $\sigma(T) = \frac{h(T)}{\rho(T)}$*.*

Im $\mathbb{R}^2$ ist ein zweidimensionales Simplex das Dreieck mit den Ecken a_0, a_1, a_2, im $\mathbb{R}^3$ ist ein dreidimensionales Simplex der Tetraeder mit den Ecken a_0, a_1, a_2, a_3, sechs eindimensionalen und vier zweidimensionalen Seitensimplexen. Ein s–dimensionales Simplex besitzt $\binom{s+1}{r+1}$ r–dimensionale Seitensimplexe. Die Größen $\lambda_0, \dots, \lambda_s \in [0,1]$ sind Koordinaten, die dem Simplex besonders gut angepasst sind. Wir werden oft diese Koordinaten statt der kartesischen verwenden.

2.2 Definition. *Als* **baryzentrische Koordinaten** $\lambda_0, \dots, \lambda_s$ *eines Punktes* $x \in T$ *des s–dimensionalen Simplex T bezeichnet man die Lösung des linearen Gleichungssystems*

$$\sum_{j=0}^{s} \lambda_j a_j = x, \qquad \sum_{j=0}^{s} \lambda_j = 1\ . \tag{2.3}$$

Der **Schwerpunkt** x_b *von T ist durch* $x_b = \frac{1}{s+1}\sum_{j=0}^{s} a_j$ *definiert.*

Das Gleichungssystem (2.3) ist für jedes x eindeutig lösbar. Dies folgt daraus, dass $x \in T$ liegt und der Definition des Simplex T. Es bleibt die Eindeutigkeit nachzuweisen. Die folgt aber sofort, da das Gleichungssystem die Form

$$\begin{pmatrix} | & | & & | \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_s \\ | & | & & | \\ 1 & 1 & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \lambda_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix}$$

hat und für den Rang gilt:

$$\begin{aligned} \text{Rang} \begin{pmatrix} | & | & & | \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_s \\ | & | & & | \\ 1 & 1 & & 1 \end{pmatrix} &= \text{Rang} \begin{pmatrix} | & | & & | \\ a_0 & a_1 - a_0 & \cdots & a_s - a_0 \\ | & | & & | \\ 1 & 0 & & 0 \end{pmatrix} \\ &= 1 + \text{Rang} \begin{pmatrix} | & & | \\ a_1 - a_0 & \cdots & a_s - a_0 \\ | & & | \end{pmatrix} = 1 + s\,. \end{aligned}$$

Wir werden bei Fehlerabschätzungen des Öfteren ein gegebenes Simplex auf das Einheitssimplex transformieren. Damit wir dabei die auftretenden Konstanten gut verfolgen können, beweisen wir das folgende kleine Lemma.

2.4 Lemma. *Jedes n–dimensionale Simplex T im $\mathbb{R}^n$ ist affin äquivalent zum Einheitsimplex T_0 der gleichen Dimension. Es gibt genau eine Abbildung*

$$F : T_0 \to T, \quad F(\bar{x}) = A\bar{x} + b$$

mit einer (n,n)–Matrix A, $\det A \neq 0$ und einem $b \in \mathbb{R}^n$, so dass $F(e_j) = a_j$ $(j = 0,\ldots,n)$. Außerdem gelten die Abschätzungen

$$|A| \le \frac{h(T)}{\rho(T_0)}, \quad |A^{-1}| \le \frac{h(T_0)}{\rho(T)}\ , \quad c\ \rho(T)^n \le |\det A| \le \tilde{c}\ h(T)^n \tag{2.5}$$

mit nur von n abhängigen Konstanten c und $\tilde{c}$, und man hat außerdem $|\det A| = \frac{|T|}{|T_0|}$.

Dabei ist $|A|$ die zur euklidischen Norm $|x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$ im $\mathbb{R}^n$ gehörende Matrixnorm, d.h. $|A| = \sup_{|e|=1} |Ae|$, und das bedeutet, dass $|A| =$ (größter Eigenwert von $A^\top A)^{\frac{1}{2}}$ ist.

Beweis. $\{e_j \mid j = 1,\ldots,n\}$ und $\{a_j - a_0 \mid j = 1,\ldots,n\}$ sind Basen des $\mathbb{R}^n$. A sei die Basistransformation:

$$Ae_j = a_j - a_0 \quad (j = 1,\ldots,n)\ .$$

Dann leistet

$$F(\bar{x}) = A\bar{x} + a_0$$

das Verlangte. F ist eindeutig bestimmt, denn aus $Ae_j + b = A'e_j + b'$ für $j = 0,\ldots,n$ folgt für $j = 0$ wegen $e_0 = 0$, dass $b = b'$ ist, und demnach $(A - A')e_j = 0$ für alle $j = 1,\ldots,n$ gilt, woraus wiederum $A = A'$ folgt.

Es sei $e \in \mathbb{R}^n$, $|e| = 1$. Nach Definition von $\rho(T_0)$ gibt es ein $x_0 \in T_0$, so dass $\overline{B_{\frac{\rho}{2}(T_0)}(x_0)} \subset T_0$ ist. Dann gibt es auch $x_1, x_2 \in T_0$, so dass $x_1 - x_2 = e\rho(T_0)$ gilt. Damit folgt dann

$$|Ae| = |Ax_1 - Ax_2|\ \rho(T_0)^{-1} \le h(T)\rho(T_0)^{-1}\,.$$

Das bedeutet aber gerade, dass

$$|A| \le h(T)\rho(T_0)^{-1}$$

ist. Genauso folgt die zweite Abschätzung in (2.5). Weiter ist nach der Transformationsregel

$$|T| = \int_T 1\,dx = \int_{T_0} |\det A|\,d\bar{x} = |T_0|\,|\det A|$$

und demnach $|\det A| = \frac{|T|}{|T_0|}$. Das Volumen von $|T|$ läßt sich wie folgt abschätzen:

$$|B_{\frac{h(T)}{2}}(\tilde{x}_0)| \geq |T| \geq |B_{\frac{\rho(T)}{2}}(x_0)| = |S^{n-1}| \, \frac{\rho(T)^n}{2^n} = c(n)\, \rho(T)^n \, .$$

□

Wir setzen nun Simplexe zu einer Triangulierung des vorgegebenen beschränkten Gebietes $G \subset \mathbb{R}^n$ zusammen. Es wird verlangt, dass die Simplexe nur an gemeinsamen Seitensimplexen zusammenhängen. Wir werden sehen, dass dann das Gebiet polygonal berandet sein muss.

2.6 Definition. *$G \subset \mathbb{R}^n$ sei ein beschränktes Gebiet,*

$$\bar{G} = \bigcup_{j=1}^{m} T_j \; , \quad \partial G = \bigcup_{j=1}^{m'} T'_j \quad (m, m' \in \mathbb{N})$$

mit n–dimensionalen Simplexen T_j und $(n-k)$–dimensionalen ($k \in \{1, \ldots, n\}$) Simplexen T'_j, die Seitensimplexe der T_j sind.

$$\mathcal{T} = \{T_j \mid j = 1, \ldots, m\}$$

nennt man eine **Triangulierung** *von G. Sie heißt* **zulässige Triangulierung***, wenn für je zwei Simplexe $T_1, T_2 \in \mathcal{T}$ gilt, dass $T_1 \cap T_2 = S$ mit $S = \emptyset$ oder einem gemeinsamen $(n-k)$–dimensionalen ($k \in \{1, \ldots, n\}$) Seitensimplex von T_1 und T_2 ist. Für eine zulässige Triangulierung $\mathcal{T}$ definieren wir*

$$h = \max_{T \in \mathcal{T}} h(T), \quad \rho = \min_{T \in \mathcal{T}} \rho(T). \tag{2.7}$$

h nennen wir **globale Gitterweite** *oder* **Feinheit** *von $\mathcal{T}$.*

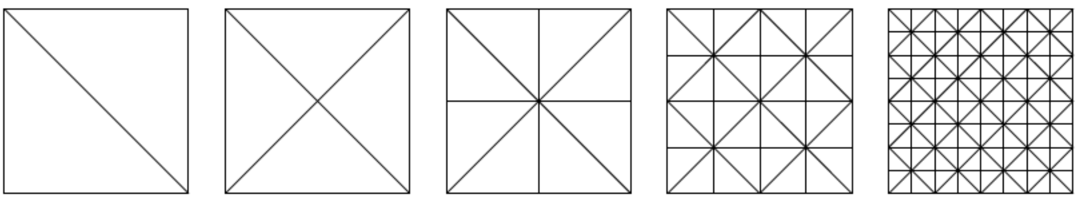


Abb. Sukzessive verfeinerte Triangulierung eines Quadrats im $\mathbb{R}^2$

Hilfreich ist der folgende Satz.

2.8 Satz. *Es sei G zulässig trianguliert und sei $m \in \mathbb{N}$. Ist dann $v \in C^{m-1}(\overline{G})$ und gilt $v\big|_T \in C^m(T)$, $T \in \mathcal{T}$, so ist $v \in H^m(G)$.*

Beweis. Wir sehen uns nur den Fall $m = 1$ an. Wesentlich ist hier nur der Nachweis, dass v eine schwache Ableitung besitzt. Dazu sei $\varphi \in C_0^\infty(G)$. Dann erhält man mit dem Gaußschen Integralsatz

$$\begin{aligned}\int_G v\partial_i\varphi\,dx &= \sum_{T\in\mathcal{T}}\int_T v\partial_i\varphi\,dx = \sum_{T\in\mathcal{T}}\Big(-\int_T \partial_i v\varphi\,dx + \int_{\partial T} v\varphi\nu_i\,do\Big)\\ &= -\int_G \partial_i v\varphi\,dx\,.\end{aligned}$$

Hierbei wurde verwendet, dass $v \in C^0(\overline{G})$ ist und dass die Randterme zwischen zwei Simplexen sich wegen der Orientierung der Normalen wegheben.□

2.3 Simpliziale Lagrange–Elemente

Die in (2.3) eingeführten baryzentrischen Koordinaten eignen sich hervorragend zur einfachen Darstellung von Polynomen, die auf Simplexen definiert sind. Wir bezeichnen im folgenden den Raum der Polynome vom Grad kleiner oder gleich k ($k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$) mit

$$\mathbb{P}_k = \{p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \mid p(x) = \sum_{|\alpha|=0}^{k} c_\alpha x^\alpha,\ c_\alpha \in \mathbb{R}\} \tag{3.1}$$

und verwenden, wenn es dem Verständnis dient, auch die Bezeichnung $\mathbb{P}_k(M) = \{p|_M \mid p \in \mathbb{P}_k\}$ für eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$. Ist $p \in \mathbb{P}_k$, $p(x) = \sum_{|\alpha|=0}^{k} c_\alpha x^\alpha$, so ist mit (2.3) $x_i = \sum_{j=0}^{n} a_{ji}\lambda_j$, $x_i = x_i(\lambda)$, $\lambda = (\lambda_0, \ldots, \lambda_n)$, also

$$p(x) = \sum_{|\alpha|=0}^{k} c_\alpha \prod_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=0}^{n} a_{ji}\lambda_j\Big)^{\alpha_i}\,.$$

Wegen $1 = \sum_{j=0}^{n}\lambda_j$ läßt sich dann p als ein Polynom vom Grad k ohne konstanten Term in den $n+1$ Variablen $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ schreiben:

$$p(x(\lambda)) = \bar{p}(\lambda) = \sum_{|\beta|=1}^{k} d_\beta\lambda^\beta.$$

Beispiel. Für $k = 1$, $n = 2$ und $p(x) = a + bx_1 + cx_2$ erhalten wir, auf Grund von $x_i = \sum_{j=0}^{2} \lambda_j a_{ji}$:

$$\begin{aligned} p(x) &= a + bx_1 + cx_2 \\ &= a + b(\lambda_0 a_{01} + \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{21}) + c(\lambda_0 a_{02} + \lambda_1 a_{12} + \lambda_2 a_{22}) \\ &= \lambda_0 \underbrace{(a + ba_{01} + ca_{02})}_{=:d_0} + \lambda_1 \underbrace{(a + ba_{11} + ca_{12})}_{=:d_1} + \lambda_2 \underbrace{(a + ba_{21} + ca_{22})}_{=:d_2} \\ &= \sum_{j=0}^{2} d_j \lambda_j \,. \end{aligned}$$

3.2 Element (Lineares Element, R. Courant).

1. *Sei T ein n–dimensionales Simplex. Dann ist durch Vorgabe von q_j $(j = 0, \ldots, n)$ ein $p \in \mathbb{P}_1(T)$ eindeutig bestimmt, so dass*
$$p(a_j) = q_j, \qquad j = 0, \ldots, n. \tag{3.3}$$
Es ist $\dim \mathbb{P}_1(T) = n + 1$.

2. *Ist $G \subset \mathbb{R}^n$ zulässig trianguliert und sind $\bar{a}_j$ $(j = 1, \ldots, m)$ die Ecken der Triangulierung $\mathcal{T}$, so ist durch Vorgabe von $u_h(\bar{a}_j)$ $(j = 1, \ldots, m)$ eindeutig eine Funktion $u_h \in X_h$,*
$$X_h = \{u_h \in C^0(\overline{G}) |\ u_h|_T \in \mathbb{P}_1(T),\ T \in \mathcal{T}\} \subset H^1(G),$$
bestimmt.

3. *Eine Basis von X_h ist durch die Funktionen*
$$\phi_j \in X_h,\ \phi_j(\bar{a}_k) = \delta_{jk} \quad (j, k = 1, \ldots, m)$$
gegeben. Diese Basis nennt man **Knotenbasis**.

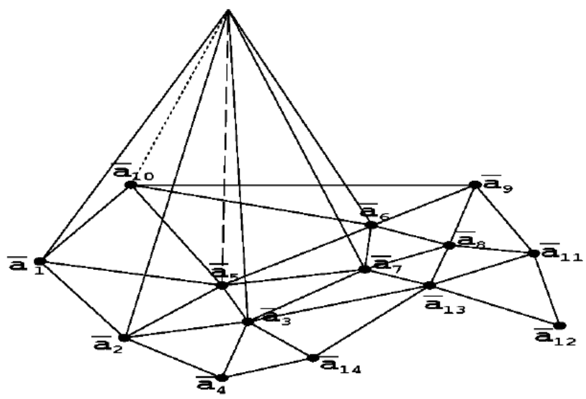


Abb. Eine Basisfunktion des Elements 3.2.

Beweis. Zur Bestimmung von $p \in \mathbb{P}_1(T)$, $p(x) = c_0 + \sum_{j=1}^n c_j x_j$, ist für gegebene Werte q_i das Gleichungssystem $p(a_i) = q_i$, $i = 0, \ldots, n$ zur Bestimmung von $c_0, \ldots, c_n$ zu lösen. Das sind $n+1$ Gleichungen für $n+1$ Unbekannte. Also reicht es, eine Lösung anzugeben. Zwischenbemerkung: dieses Vorgehen ist prinzipiell von Bedeutung, vor allem zur Konstruktion komplizierter Elemente. Dazu sei $\{e_0, \ldots, e_n\}$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}^{n+1}$. (3.3) ist sehr einfach zu zeigen:

$$p(\lambda(x)) = \bar{p}(\lambda) = \sum_{j=0}^{n} d_j \lambda_j \,.$$

Wegen $x(e_k) = a_k$ $(k = 0, \ldots, n)$ folgt, dass

$$q_k = p(a_k) = \bar{p}(e_k) = \sum_{j=0}^{n} d_j \delta_{jk} = d_k$$

ist. Wenn wir zeigen, dass die damit eindeutig bestimmte stückweise lineare Funktion u_h auf $\bar{G}$ stetig ist, folgt mit Satz 2.8, dass $X_h \subset H^1(G)$ ist. Sind T_1 und T_2 zwei Simplexe der Triangulierung $\mathcal{T}$ und ist $T_1 \cap T_2 = S$ mit einem gemeinsamen $(n-k)$–dimensionalen Seitensimplex, so ist $u_h|_S \in \mathbb{P}_1(S)$ nach dem ersten Teil dieses Beweises schon durch die Werte in den Ecken von S eindeutig bestimmt. □

Es sei hier vermerkt, dass der Finite–Elemente–Raum X_h zwar Teilraum von $H^1(G)$, nicht aber von $H^2(G)$ ist.

Wegen der vermutlich höheren Approximationsordnung versuchen wir ein Element mit quadratischen Ansatzfunktionen zu konstruieren. Dazu sei T wieder ein n–dimensionales Simplex mit den Ecken $a_0, \ldots, a_n$. Ein $p \in \mathbb{P}_2(T)$ schreibt sich in baryzentrischen Koordinaten so:

$$\bar{p}(\lambda) = \sum_{j=0}^{n} d_j \lambda_j + \sum_{i,j=0}^{n} d_{ij} \lambda_i \lambda_j .$$

In dieser Formel können wir entweder $d_{ij} = d_{ji}$ und $d_{ii} = 0$ oder $d_{ij} = 0$, $i \geq j$, annehmen, denn $1 = \sum_{k=0}^n \lambda_k$ impliziert $\lambda_i = \sum_{k=0}^n \lambda_i \lambda_k$. Im Weiteren werden wir die zweite Variante benutzen.

Erklärung in $2D$: Sei $x_1 = \sum_{i=0}^2 \alpha_i \lambda_i$ und $x_2 = \sum_{i=0}^2 \beta_i \lambda_i$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} p(x) &= \sum_{|\alpha|=0}^{2} c_\alpha x^\alpha \\ &= c_{00} x_1^0 x_2^0 + c_{10} x_1 x_2^0 + c_{01} x_1^0 x_2 + c_{11} x_1 x_2 + c_{20} x_1^2 x_2^0 + c_{02} x_1^0 x_2^2 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= c_{00}\sum_{i=0}^{2}\lambda_i + c_{10}\sum\alpha_i\lambda_i + c_{01}\sum\beta_i\lambda_i + c_{11}\underbrace{\left(\sum\alpha_i\lambda_i\right)\left(\sum\beta_i\lambda_i\right)}_{=\sum_{i,j=0}^{2}\lambda_i\lambda_j\alpha_i\beta_j}\\
&\quad + c_{20}\underbrace{\left(\sum\alpha_i\lambda_i\right)^2}_{=\sum\lambda_i\lambda_j\alpha_i\alpha_j} + c_{02}\underbrace{\left(\sum\beta_i\lambda_i\right)^2}_{=\sum\lambda_i\lambda_j\beta_i\beta_j}\\
&= \lambda_0(c_{00}+c_{10}\alpha_0+c_{01}\beta_0) && (\tilde d_0)\\
&\quad + \lambda_1(c_{00}+c_{10}\alpha_1+c_{01}\beta_1) && (\tilde d_1)\\
&\quad + \lambda_2(c_{00}+c_{10}\alpha_2+c_{01}\beta_2) && (\tilde d_2)\\
&\quad + \lambda_0^2(c_{11}\alpha_0\beta_0+c_{20}\alpha_0^2+c_{02}\beta_0^2) && (\tilde d_{00})\\
&\quad + \lambda_0\lambda_1(c_{11}(\alpha_0\beta_1+\beta_0\alpha_1)+2c_{20}\alpha_0\alpha_1+2c_{02}\beta_0\beta_1) && (\tilde d_{01})\\
&\quad + \lambda_0\lambda_2(c_{11}(\alpha_0\beta_2+\beta_0\alpha_2)+2c_{20}\alpha_0\alpha_2+2c_{02}\beta_0\beta_2) && (\tilde d_{02})\\
&\quad + \lambda_1^2(c_{11}\alpha_1\beta_1+c_{20}\alpha_1^2+c_{02}\beta_1^2) && (\tilde d_{11})\\
&\quad + \lambda_1\lambda_2(c_{11}(\alpha_1\beta_2+\beta_1\alpha_2)+2c_{20}\alpha_1\alpha_2+2c_{02}\beta_1\beta_2) && (\tilde d_{12})\\
&\quad + \lambda_2^2(c_{11}\alpha_2\beta_2+c_{20}\alpha_2^2+c_{02}\beta_2^2) && (\tilde d_{22})\\
&= \sum_{i=0}^{2}\tilde d_i\lambda_i + \sum_{\substack{i,j=0\\ i\le j}}^{2}\tilde d_{ij}\lambda_i\lambda_j
\end{aligned}
$$

Aus $1 = \sum\limits_{k=0}^{2}\lambda_k$ folgt $\lambda_i = \sum\limits_{k=0}^{2}\lambda_i\lambda_k$ und somit gilt für alle $i = 0,1,2$:

$$\lambda_i\tilde d_{ii} = \sum_{k=0}^{2}\lambda_i\lambda_k\tilde d_{ii}\,.$$

Daraus folgt

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{2}\tilde d_i\lambda_i + \sum_{i,j=0}^{2}\tilde d_{ij}\lambda_i\lambda_j &= \sum_{i=0}^{2}\lambda_i(\tilde d_i+\tilde d_{ii}) + \sum_{i,j=0}^{2}(\tilde d_{ij}-\tilde d_{ii})\lambda_i\lambda_j\\
&= \sum_{i=0}^{2}d_i\lambda_i + \sum_{\substack{i,j=0\\ i<j}}^{2}d_{ij}\lambda_i\lambda_j =: \overline{p}(\lambda),
\end{aligned}
$$

wobei $d_i = \tilde d_i - \tilde d_{ii}$ für $i = 0,1,2$, $d_{ij} := \tilde d_{ij} - \tilde d_{ii} - \tilde d_{jj}$ für $i < j$ und $d_{ij} = 0$ sonst. Durch symmetrisieren kann man auch $d_{ij} := \frac{1}{2}(\tilde d_{ij} - \tilde d_{ii} - \tilde d_{jj})$ für $i \neq j$ und $d_{ij} = 0$ wählen.

Ein $p \in \mathbb{P}_2(T)$ kann man in baryzentrischen Koordinaten schreiben als:

$$\bar{p}(\lambda) = \sum_{j=0}^{n} d_j \lambda_j + \sum_{\substack{i,j=0\\ i<j}}^{n} d_{ij}\lambda_i\lambda_j = \sum_{j=0}^{n} d_j\lambda_j + \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} d_{ij}\lambda_i\lambda_j .$$

Der lineare Anteil von $\bar{p}$ ist durch die Werte in den "Ecken" $e_0, \ldots, e_n$ festgelegt, d.h.

$$\bar{p}(e_k) = \sum_{j=0}^{n} d_j\delta_{kj} + \sum_{\substack{i,j=0\\ i<j}}^{n} d_{ij}\delta_{ik}\delta_{jk} = d_k \,.$$

Den quadratischen Anteil kann man durch die Werte von p in den Kantenmittelpunkten $a_{ij} = \frac{1}{2}(a_i + a_j) \quad (i,j = 0,\ldots,n;\ i<j)$ beziehungsweise die Werte von $\bar{p}$ in $e_{ij} = \frac{1}{2}(e_i + e_j) \quad (i,j = 0,\ldots,n;\ i<j)$ festlegen. Es ist dann

$$\begin{aligned}
\bar{p}(e_{ij}) &= \frac{1}{2}(\bar{p}(e_i) + \bar{p}(e_j)) + \sum_{m=1}^{n}\sum_{l=0}^{m-1} d_{lm}\frac{1}{2}(\delta_{li}+\delta_{lj})\frac{1}{2}(\delta_{mi}+\delta_{mj})\\
&= \frac{1}{2}(\bar{p}(e_i) + \bar{p}(e_j)) + \frac{1}{4}\sum_{m=1}^{n}\sum_{l=0}^{m-1} d_{lm}(\delta_{li}\delta_{mi} + \delta_{lj}\delta_{mi} + \delta_{li}\delta_{mj} + \delta_{lj}\delta_{mj})\\
&= \frac{1}{2}(\bar{p}(e_i) + \bar{p}(e_j)) + \frac{1}{4}d_{ij} \,,
\end{aligned}$$

denn $\delta_{li}\delta_{mi} = \delta_{lj}\delta_{mj} = 0$ wegen $l < m$ und $\delta_{lj}\delta_{mi} = 0$ wegen $l < m$ und $i < j$. Insgesamt haben wir damit gezeigt, dass

$$\begin{aligned}
d_j &= \bar{p}(e_j) = p(a_j) \,,\\
d_{ij} &= 4\bar{p}(e_{ij}) - 2(\bar{p}(e_i) + \bar{p}(e_j)) = 4(p(a_{ij})) - 2(p(a_i) + p(a_j))
\end{aligned}$$

für $i,j = 0,\ldots,n;\ i<j$ ist. Also ist

$$\begin{aligned}
\bar{p}(\lambda) &= \sum_{j=0}^{n} p(a_j)\lambda_j + \sum_{m=1}^{n}\sum_{l=0}^{m-1}\Big(4p(a_{lm}) - 2(p(a_l) + p(a_m))\Big)\lambda_l\lambda_m\\
&= 4\sum_{m=1}^{n}\sum_{l=0}^{m-1} p(a_{lm})\lambda_l\lambda_m + \sum_{j=0}^{n} p(a_j)\lambda_j - 2\sum_{m=1}^{n} p(a_m)\lambda_m\Big(\sum_{l=0}^{m-1}\lambda_l\Big)\\
&\quad - 2\sum_{l=0}^{n-1}\sum_{m=l+1}^{n} p(a_l)\lambda_l\lambda_m\\
&= 4\sum_{m=1}^{n}\sum_{l=0}^{m-1} p(a_{lm})\lambda_l\lambda_m + \sum_{j=0}^{n} p(a_j)\lambda_j - 2p(a_n)\lambda_n\sum_{l=0}^{n-1}\lambda_l
\end{aligned}$$

$$- 2p(a_0)\lambda_0 \sum_{l=1}^{n} \lambda_l - 2 \sum_{m=1}^{n-1} p(a_m)\lambda_m \Big(\sum_{l=0}^{m-1} \lambda_l + \sum_{l=m+1}^{n} \lambda_l \Big)$$

$$= 4 \sum_{m=1}^{n} \sum_{l=0}^{m-1} p(a_{lm})\lambda_l\lambda_m + \sum_{m=1}^{n} p(a_m)\lambda_m(2\lambda_m - 1) \ .$$

3.4 Element (Quadratisches Element).

1. *Sei T ein n–dimensionales Simplex mit Kantenmittelpunkten $a_{ij} = \frac{1}{2}(a_i + a_j)$ $(i, j = 0, \dots, n;\ i < j)$. Dann ist durch Vorgabe von $p(a_j)$ $(j = 0, \dots, n)$ und $p(a_{ij})$ $(i, j = 0, \dots, n;\ i < j)$ ein $p \in \mathbb{P}_2(T)$ eindeutig bestimmt. Für alle $p \in \mathbb{P}_2(T)$ gilt:*

$$p(x) = \bar{p}(\lambda) = \sum_{j=0}^{n} p(a_j)\lambda_j(2\lambda_j - 1) + 4 \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=0}^{j-1} p(a_{ij})\lambda_i\lambda_j \ . \tag{3.5}$$

   Es ist $\dim \mathbb{P}_2(T) = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$.

2. *Ist $G \subset \mathbb{R}^n$ zulässig trianguliert und sind $\bar{a}_j$ $(j = 1, \dots, m)$ alle Ecken und Kantenmittelpunkte der Triangulierung $\mathcal{T}$, so ist durch Vorgabe von $u_h(\bar{a}_j)$ $(j = 1, \dots, m)$ eindeutig eine Funktion $u_h \in X_h$,*

$$X_h = \{u_h \in C^0(\bar{G}) |\ u_h|_T \in \mathbb{P}_2(T),\ T \in \mathcal{T}\} \subset H^1(G)$$

   bestimmt.

3. *Eine Knotenbasis von X_h ist durch die Funktionen*

$$\phi_j \in X_h,\ \phi_j(\bar{a}_k) = \delta_{jk} \quad (j, k = 1, \dots, m)$$

   gegeben.

Beweis. Teil 1 wurde schon nachgewiesen, die Dimension ist klar. Zu Teil 2 beobachten wir wie beim linearen Element, dass die globale Stetigkeit von u_h durch die eindeutige Bestimmtheit von $u_h|_S$, $S = T_1 \cap T_2$ auf dem $(n-k)$–dimensionalen gemeinsamen Seitensimplex S von T_1 und T_2 folgt. Wende Teil 1 auf S mit $n - k$ statt n an. Die Basis erkennt man an der Darstellung (3.5). □

Mit (3.5) kann man sich auch die Element–Basisfunktionen veranschaulichen. In einer Raumdimension ist auf dem Einheitselement $T_0 = (0, 1)$ mit $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_{01} = \frac{1}{2}$

$$\lambda_0 = 1 - x, \quad \lambda_1 = x, \quad \bar{\phi}_0(\lambda) = \lambda_0(2\lambda_0 - 1), \quad \bar{\phi}_1(\lambda) = \lambda_1(2\lambda_1 - 1)$$

also

$$\phi_0(x) = (1-x)(1-2x), \quad \phi_1(x) = x(2x-1)$$

und in symbolischer Schreibweise

$$\bar{\phi}_{01}(\lambda) = 4\lambda_0\lambda_1, \quad \phi_{01}(x) = 4(x-x^2).$$

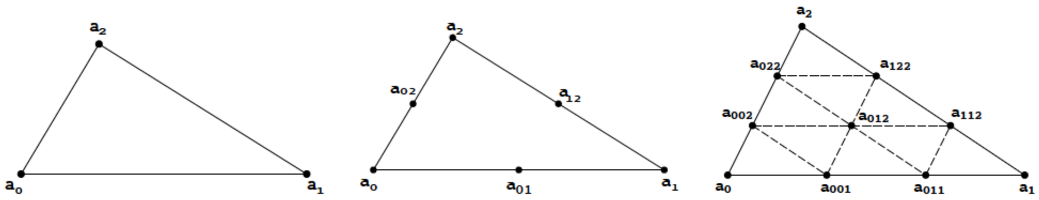


Abb. Lagrange Gitter erster, zweiter und dritter Ordnung eines Dreiecks.

Wir können den Polynomgrad weiter erhöhen und so das allgemeine Lagrange–Element konstruieren.

3.6 Lemma. *Es sei T ein n–Simplex und $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt für alle $p \in \mathbb{P}_k(T)$ die Darstellung*

$$p(x(\lambda)) = \bar{p}(\lambda) = \sum_{|i|=k} \bar{p}\Big(\frac{i}{k}\Big)\phi_i(\lambda) \tag{3.7}$$

mit $i = (i_0, \dots, i_n) \in \mathbb{N}_0^{n+1}$, $\frac{i}{k} := \left(\frac{i_0}{k}, \dots, \frac{i_n}{k}\right)$ und

$$\phi_i(\lambda) = \prod_{l=0}^{n} \prod_{j_l=0}^{i_l-1} \frac{\lambda_l - \frac{j_l}{k}}{\frac{i_l}{k} - \frac{j_l}{k}}. \tag{3.8}$$

Das bedeutet, dass $p \in \mathbb{P}_k(T)$ eindeutig durch seine Werte auf dem Lagrange–Gitter k-ter Ordnung

$$\mathbb{G}_k(T) = \left\{ x = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j a_j \;\middle|\; \lambda_j \in \left\{\frac{m}{k} \;\middle|\; m = 0, \dots, k\right\},\ \lambda_j \geq 0;\ \sum_{j=0}^{n} \lambda_j = 1 \right\} \tag{3.9}$$

bestimmt ist. Es ist $\dim \mathbb{P}_k = \binom{n+k}{k}$.

Beweis. Zunächst ist klar, dass $\phi_i \in \mathbb{P}_k$ ist, falls $|i| = k$ ist, denn die Produkte in (3.8) bestehen aus

$$\sum_{l=0}^{n} i_l = |i| = k$$

Faktoren. Außerdem ist für $|m| \leq k$

$$\phi_i\Big(\frac{m}{k}\Big) = \delta_{im} = \delta_{i_0 m_0} \cdots \delta_{i_n m_n},$$

denn für $m = i$, d.h. $m_l = i_l$ $(l = 0, \dots, n)$, ist

$$\phi_i\Big(\frac{m}{k}\Big) = \prod_{l=0}^{n} \prod_{j_l=0}^{i_l-1} \frac{\frac{m_l}{k} - \frac{j_l}{k}}{\frac{i_l}{k} - \frac{j_l}{k}} = 1 \ .$$

Ist $m \neq i$, so gibt es eine Zahl $l_0 \in \{0, \dots, n\}$, so dass $m_{l_0} \neq i_{l_0}$ ist und auch ein $l^* \in \{0, \dots, n\}$ mit $m_{l^*} < i_{l^*}$, denn sonst hätten wir

$$k \geq |m| = \sum_{l^*=0}^{n} m_{l^*} = \sum_{\substack{l^*=0\\ l^*\neq l_0}}^{n} m_{l^*} + m_{l_0} > \sum_{\substack{l^*=0\\ l^*\neq l_0}}^{n} i_{l^*} + i_{l_0} = |i| = k,$$

was ein Widerspruch ist. Dann ist aber auch

$$\frac{m_{l^*}}{k} - \frac{j_{l^*}}{k} = 0 \quad \text{für ein} \quad j_{l^*} < i_{l^*}$$

und damit $\phi_i(\frac{m}{k}) = 0$ für $m \neq i$. Mit (3.7) ist ein Polynom $p \in \mathbb{P}_k(T)$ konstruiert, das vorgegebene Werte auf $\mathbb{G}_k$ annimmt. Es ist

$$\dim \mathbb{P}_k(T) = |\mathbb{G}_k| \ ,$$

also ist (3.7) die einzige Lösung dieses Problems. □

3.10 Element (Allgemeines Lagrange–Element). *Es sei $G \subset \mathbb{R}^n$ zulässig trianguliert. Ist $\mathbb{G}_k$ das Gitter k–ter Ordnung zu dieser Triangulierung $\mathcal{T}$, d.h., ist*

$$\mathbb{G}_k = \bigcup_{T\in\mathcal{T}} \mathbb{G}_k(T) = \{\bar{a}_j |\ j = 1, \dots, m\},$$

so ist durch Vorgabe von $u_h|_{\mathbb{G}_k}$ eindeutig ein $u_h \in X_h$,

$$X_h = \{u_h \in C^0(\bar{G}) \ \big|\ u_h|_T \in \mathbb{P}_k(T),\ T \in \mathcal{T}\} \subset H^1(G)$$

bestimmt. Eine Basis von X_h ist durch die Funktionen

$$\phi_j \in X_h, \quad \phi_j(\bar{a}_i) = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, \dots, m)$$

gegeben.

Beweis. Es bleibt nur noch der stetige Übergang zwischen den Simplexen nachzuprüfen. Dies geschieht aber genau so wie beim quadratischen Element. □

Damit haben wir eine Reihe von diskreten Teilräumen X_h von $H^1(G)$ konstruiert mit relativ einfachen Basen und mit Basisfunktionen, die kleinen Träger besitzen. Es ist um einiges schwieriger, Teilräume von $H^2(G)$ zu finden, denn dann müssen die Basisfunktionen global aus $C^1(\overline{G})$ und nicht nur wie eben konstruiert aus $C^0(\overline{G})$ sein.

2.4 Poincaré Ungleichungen

Im Abschnitt 2.1 haben wir den Fehler zwischen kontinuierlicher und diskreter Lösung abgeschätzt. Satz 1.11 lieferte eine Abschätzung der Form

$$\|\nabla(u-u_h)\|_{L^2(G)} \leq \inf_{\varphi_h \in X_h} \|\nabla(u-\varphi_h)\|_{L^2(G)}.$$

Im vorigen Abschnitt wurden endlichdimensionale Teilräume X_h des kontinuierlichen Lösungsraumes $X = \mathring{H}^1(G)$ bereitgestellt. Unser Ziel ist eine asymptotische Fehlerabschätzung der Art

$$\|u-u_h\|_{H^1(G)} \leq c\ h^\alpha$$

mit einer möglichst nur von den Daten abhängenden Konstanten c und einem möglichst großen Exponenten α. Im folgenden Kapitel wird bewiesen, dass unter geeigneten Voraussetzungen

$$\|u - I_h u\|_X \leq c\ h^\alpha$$

für eine "Interpolierende" $v_h = I_h u \in X_h$ zu $u \in X$ gilt. Die Konstante c hängt dann im Algemeinen aber von höheren Normen von u ab. Die Konstruktion von Interpolationsoperatoren

$$I_h \in L(X, X_h)$$

ist aber unabhängig von Bedeutung für die Numerische Analysis.

Die Abschätzung des Interpolationsfehlers geschieht durch Aufspalten der Normen in die Elementanteile und Transformation auf das Einheitssimplex. Damit dabei nur die optimalen Potenzen der Gitterweite entstehen, dürfen nur die höchsten Ableitungen vorkommen. Dies erreicht man durch sukzessive Anwendung von Poincaréungleichungen.

4.1 Lemma. *Für konvexes $G \subset \mathbb{R}^n$ mit Durchmesser $d(G) = \sup_{x,y\in G} |x-y|$ und $u \in C^1(G)$ gilt*

$$|u(x)| \leq \frac{d(G)^n}{n|G|} \int_G \frac{|\nabla u(y)|}{|y-x|^{n-1}} dy,$$

falls die rechte Seite endlich ist und $\int_G u = 0$ erfüllt ist.

Beweis. Für $x, y \in G$ ist dann mit $z(t) = x + t(y-x)$, $t \in [0,1]$

$$u(x) - u(y) = u(z(0)) - u(z(1)) = -\int_0^1 \frac{d}{dt} u(z(t)) dt$$

$$= -\int_0^1 (\nabla u(z(t)),\ \dot z(t))dt = -\int_0^1 (\nabla u(x+t(y-x)),\ y-x)dt.$$

Mit der Substitution $s = |y-x|t$ erhält man weiter

$$= -\int_0^{|y-x|} \Big(\nabla u\Big(x + s\ \frac{y-x}{|y-x|}\Big),\ \frac{y-x}{|y-x|}\Big)\, ds,$$

und mit der Abkürzung $\xi = \frac{y-x}{|y-x|}$ (Richtungsvektor),

$$= -\int_0^{|y-x|} (\nabla u(x+s\xi), \xi) ds\,.$$

Integriert man nun diese Gleichung bezüglich y, so folgt mit $\xi = \xi(y)$

$$|G|u(x) - \int_G u(y)dy = -\int_G \int_0^{|x-y|} (\nabla u(x+s\xi, \xi) ds\ dy.$$

Zur Abkürzung schreibt man

$$v(x+s\xi) = \begin{cases} (\nabla u(x+s\xi), \xi), & \text{falls } x+s\xi \in G \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

und erhält wegen $\int_G u(y)dy = 0$

$$u(x) = -\frac{1}{|G|} \int_G \int_0^{|x-y|} v(x+s\xi) ds\ dy,$$

woraus folgt

$$\begin{aligned}
|u(x)| &\le \frac{1}{|G|} \int_G \int_0^{|x-y|} |v(x+s\xi)|\, ds\ dy \\
&\le \frac{1}{|G|} \int_{B_{d(G)}(x)} \int_0^{\infty} |v(x+s\xi)|\, ds\ dy \\
&= \frac{1}{|G|} \int_0^{\infty} \int_0^{d(G)} \int_{S^{n-1}} |v(x+s\xi)| r^{n-1}\, do(\xi)\, dr\ ds \\
&\le \frac{d(G)^n}{n|G|} \int_0^{\infty} \int_{S^{n-1}} |v(x+s\xi)|\, do(\xi)\ ds \\
&= \frac{d(G)^n}{n|G|} \int_0^{\infty} \int_{S^{n-1}} \frac{|v(x+s\xi)|}{s^{n-1}} s^{n-1}\, do(\xi)\ ds \\
&= \frac{d(G)^n}{n|G|} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|v(z)|}{|z-x|^{n-1}}\, dz \le \frac{d(G)^n}{n|G|} \int_G \frac{|\nabla u(z)|}{|z-x|^{n-1}}\, dz.
\end{aligned}$$

Damit ist das Lemma bewiesen. □

• Die Aussage des vorherigen Lemmas ist auch für allgemeinere Gebiete, z.B. Lipschitzgebiete, richtig. Man kann sich vorstellen die Gerade im Beweis durch Pfade zu ersetzen.

4.2 Satz (Poincaré). *Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes konvexes oder beschränktes Lipschitz Gebiet. Dann gibt es eine Konstante $c \leq \frac{d(G)^{n+1}}{n|G|}\omega_n$, so dass für alle $u \in H^{1,p}(G)$ mit $\int_G u = 0$ und $1 \leq p \leq \infty$ gilt:*

$$\|u\|_{L^p(G)} \leq c \, \|\nabla u\|_{L^p(G)} \ .$$

Beweis. Da für $1 \leq p < \infty$ nach Satz 10.7 Funktionen aus $H^{1,p}(G) \cap C^1(G)$ dicht in $H^{1,p}(G)$ ist, reicht es die Behauptung für $u \in H^{1,p}(G) \cap C^1(G)$ zu zeigen. Aus dem vorangegangenem Lemma folgt

$$\|u\|_{L^p(G)} = \Big(\int_G |u(x)|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{d(G)^n}{n|G|} \left(\int_G \Big(\int_G \frac{|\nabla u(y)|}{|y-x|^{n-1}} dy\Big)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} .$$

Das Integral auf der rechten Seite wird für $p > 1$ so behandelt:

$$\begin{aligned}
&\int_G \Big(\int_G \frac{|\nabla u(y)|}{|y-x|^{n-1}} dy\Big)^p dx \\
&\quad = \int_G \Big(\int_G |\nabla u(y)| \ |y-x|^{\frac{1}{p}(1-n)} \ |y-x|^{\frac{1}{p'}(1-n)} dy\Big)^p dx \qquad (4.3)\\
&\quad \leq \int_G \ \Big(\int_G |\nabla u(y)|^p |y-x|^{1-n} dy\Big)\Big(\int_G |y-x|^{1-n} dy\Big)^{\frac{p}{p'}} dx.
\end{aligned}$$

Es ist nun

$$\begin{aligned}
\int_G |y-x|^{1-n} dy &\leq \int_{B_{d(G)}(x)} |y-x|^{1-n} dy \\
&= \int_0^{d(G)} \int_{S^{1-n}} r^{1-n+n-1} do(\xi) \ dr = d(G)|S^{n-1}|
\end{aligned}$$

also kann man (4.3) weiter abschätzen zu

$$\begin{aligned}
&\leq (d(G)|S^{n-1}|)^{p-1} \int_G \ \int_G |\nabla u(y)|^p \ |y-x|^{1-n} dy \ dx \\
&= (d(G)|S^{n-1}|)^{p-1} \int_G |\nabla u(y)|^p \int_G |y-x|^{1-n} dx \ dy \\
&\leq (d(G)|S^{n-1}|)^p \int_G |\nabla u(y)|^p dy.
\end{aligned}$$

Insgesamt hat man damit gezeigt, dass gilt:

$$\|u\|_{L^p(G)} \leq \frac{d(G)^{n+1}}{n|G|} |S^{n-1}| \, \|\nabla u\|_{L^p(G)}. \tag{4.4}$$

Der Fall $p = 1$ folgt analog ohne die Anwendung der Hölderschen Ungleichung. Der Fall $p = \infty$ folgt dann durch Grenzübergang $p \to \infty$ in (4.4), da die Konstante von p unabhängig ist. □

Mehrfache Anwendung der eben bewiesenen Poincaréschen Ungleichung für Funktionen mit Mittelwert Null liefert nun das folgende Resultat.

4.5 Satz. *Es seien $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes konvexes oder beschränktes Lipschitz Gebiet, $u \in H^{l,p}(G)$, $1 \leq p \leq \infty$, $l \in \mathbb{N}$, und*

$$\int_G D^\alpha u \, dx = 0 \quad (|\alpha| = 0, \dots, l-1). \tag{4.6}$$

Dann ist

$$\|u\|_{H^{l,p}(G)} \leq c|u|_{H^{l,p}(G)}$$

mit einer nur von G und l abhängenden Konstanten c.

Beweis. Da für $|\alpha| = 0, \dots, l-1$ $\ D^\alpha u \in H^{l-|\alpha|,p}(G)$ ist, folgt die Behauptung durch sukzessive Anwendung von Satz 4.2. □

Zu einer gegebenen Funktion läßt sich die Voraussetzung (4.6) durch das Abziehen eines geeigneten Polynoms erfüllen.

4.7 Lemma. *Zu $u \in H^{k+1,p}(G)$ gibt es genau ein Polynom $q \in \mathbb{P}_k(G)$, so dass*

$$\int_G D^\alpha (u - q) \, dx = 0 \quad (|\alpha| = 0, \dots, k). \tag{4.8}$$

Beweis. q hat die Form $q(x) = \sum_{|\beta|=0}^{k} c_\beta \, x^\beta$, und (4.8) ist äquivalent zu

$$\sum_{|\beta|=0}^{k} c_\beta \int_G D^\alpha x^\beta \, dx = \int_G D^\alpha u(x) \, dx \, .$$

Das lineare Gleichungssystem

$$\sum_{|\beta|=0}^{k} a_{\alpha\beta} c_\beta = b_\alpha \quad (|\alpha| = 0, \dots, k) \tag{4.9}$$

enthält so viele Gleichungen wie Unbekannte c_β. Es reicht also aus, die Eindeutigkeit nachzuweisen. Die Eindeutigkeit sieht man so ein. Es ist

$$\sum_{|\beta|=0}^{k} a_{\alpha\beta} c_\beta = 0 \quad (|\alpha| = 0, \dots, k)$$

genau dann, wenn

$$\int_G D^\alpha q \, dx = 0 \quad (|\alpha| = 0, \dots, k)$$

und dies ist nur für $q = 0$ wahr. □

Die Quintessenz aus Satz 4.5 und Lemma 4.7 ist der folgende Satz:

4.10 Satz. *Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes konvexes oder beschränktes Lipschitz Gebiet und $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt für alle $u \in H^{k+1,p}(G)/\mathbb{P}_k(G)$, $k \in \mathbb{N}_0$, $1 \le p \le \infty$*

$$\|u\|_{H^{k+1,p}(G)/\mathbb{P}_k(G)} \le c\, |u|_{H^{k+1,p}(G)},$$

wobei die Konstante c nur von G und k abhängt. Dabei ist wie üblich

$$\|u\|_{H^{k+1,p}(G)/\mathbb{P}_k(G)} = \inf_{q \in \mathbb{P}_k(G)} \|u - q\|_{H^{k+1,p}(G)}.$$

Andererseits gilt für $u \in H^{k,p}(G)$ und alle $q \in \mathbb{P}_k(G)$

$$|u|_{k+1} = |u - q|_{k+1} \le \|u - q\|_{k+1} \; .$$

Wenn wir nun das Infimum über alle $q \in \mathbb{P}_k(G)$ nehmen und Satz 4.10 in Betracht ziehen, haben wir bewiesen:

4.11 Folgerung. *Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes konvexes oder Lipschitz Gebiet, $p \in [1, \infty]$, und $k \in \mathbb{N}$. Dann ist die $H^{k+1,p}(G)$–Seminorm auf $H^{k+1,p}(G)/\mathbb{P}_k(G)$ eine äquivalente Norm, d.h. es gibt es eine Konstante $c = c(G, k)$, so dass für alle $u \in H^{k+1,p}(G)/\mathbb{P}_k(G)$ gilt:*

$$|u|_{H^{k+1,p}(G)} \le \|u\|_{H^{k+1,p}(G)/\mathbb{P}_k(G)} \le c\, |u|_{H^{k+1,p}(G)}.$$

2.5 Interpolationsabschätzungen

Wir erinnern an die Bezeichnungen der elementaren Funktionalanalysis. Für normierte Räume X und Y bezeichnet

$$L(X, Y) = \{A : X \to Y \,|\, A \text{ ist stetig und linear}\}.$$

Die Menge $L(X,Y)$ ist mit der punktweisen Addition und Skalarmultiplikation ein linearer Raum. Darauf ist durch

$$\|A\| = \|A\|_{L(X,Y)} = \sup_{x\in X\setminus\{0\}} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{\|x\|_X\le 1} \|Ax\|_Y$$

eine Norm erklärt. Demnach ist $L(X,Y)$ mit dieser Norm ein normierter Raum.

5.1 Definition. *Für normierte Räume X, Y bedeutet*

$$X \hookrightarrow Y\ ,$$

dass X in Y **stetig eingebettet** *ist, d.h. $X \subseteq Y$ und die Identität $E : X \to Y : u \mapsto u$ ist stetig und injektiv.*

5.2 Satz. *Es sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes konvexes oder Lipschitz Gebiet, und seinen $k, m \in \mathbb{N}_0$; $p, q \ge 1$ so, dass*

$$H^{k+1,p}(G) \hookrightarrow H^{m,q}(G). \tag{5.3}$$

Sei

$$I \in L(H^{k+1,p}(G),\ H^{m,q}(G))$$

ein Interpolationsoperator, der $\mathbb{P}_k(G)$ invariant läßt, d.h. $Is = s$ $(s \in \mathbb{P}_k(G))$. Dann gibt es ein $c = c(k, m, p, q, G, \|I\|, \|E\|)$, so dass für alle $u \in H^{k+1,p}(G)$ gilt:

$$\|u - Iu\|_{H^{m,q}(G)} \le c\ |u|_{H^{k+1,p}(G)}.$$

Beweis. Für $s \in \mathbb{P}_k(G)$ ist

$$\begin{aligned} \|u - Iu\|_{H^{m,q}(G)} &= \|E(u-s) - I(u-s)\|_{H^{m,q}(G)} \\ &\le (\|E\| + \|I\|)\ \|u - s\|_{H^{k+1,p}(G)}. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Die Bildung des Infimums über $s \in \mathbb{P}_k(G)$ und Satz 4.10 liefern

$$\|u - Iu\|_{H^{m,q}(G)} \le (\|E\| + \|I\|)\ \|u\|_{H^{k+1,p}(G)/\mathbb{P}_k(G)} \le c\ |u|_{H^{k+1,p}(G)}\,.$$

□

Die Abschätzung in Satz 5.2 hat den Vorteil, dass auf der rechten Seite nur die Halbnorm steht. Diese hat gute Skalierungseigenschaften. Deshalb untersuchen wir jetzt das Skalierungsverhalten einiger oft benötigter Normen.

5.5 Satz. *Seien $G_1,\ G_2 \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und affin äquivalent, d.h. es gibt eine invertierbare affine Abbildung $x = F(y) = Ay + b \quad (x, y \in \mathbb{R}^n)$, so dass $G_1 = F(G_2)$ ist. Mit $m \in \mathbb{N}_0$, $p \in [1, \infty]$ gelten dann für $u \in H^{m,p}(G_1)$ und $v(y) = u(F(y))$, $(y \in G_2)$ die Abschätzungen*

$$|v|_{H^{m,p}(G_2)} \leq c_1|A|^m|\det A|^{-\frac{1}{p}}|u|_{H^{m,p}(G_1)}, \tag{5.6}$$

$$|u|_{H^{m,p}(G_1)} \leq c_2|A^{-1}|^m|\det A|^{\frac{1}{p}}|v|_{H^{m,p}(G_2)}, \tag{5.7}$$

mit Konstanten c_1, c_2, die nur von m, n und p abhängen.

Beweis. Dazu seien ohne Beschränkung der Allgemeinheit $u \in C^m(G_1) \cap H^{m,p}(G_1)$, $v \in C^m(G_2) \cap H^{m,p}(G_2)$. Wegen

$$\partial_{y_j} v(y) = \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} u(F(y))\ \frac{\partial F_i}{\partial y_j}(y) = \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} u(F(y)) A_{ij}$$

folgt

$$|\partial_{y_j} v(y)| \leq |A^\top \nabla u(F(y))| \leq |A|\ |\nabla u(F(y))|.$$

Für höhere Ableitungen geht man analog vor. Es gilt

$$\partial^2_{y_i y_j} v(y) = \sum_{k,l=1}^n \partial^2_{x_k x_l} u(F(y))\ \frac{\partial F_k}{\partial y_j}(y)\ \frac{\partial F_l}{\partial y_i}(y) = \sum_{k,l=1}^n \partial^2_{x_k x_l} u(F(y)) A_{li} A_{kj}$$

und somit

$$|\partial^2_{y_i y_j} v(y)| \leq |A|^2\, |\nabla^2 u(F(y))|\,.$$

Mit vollständiger Induktion beweist man dann, dass für $|\alpha| = m$ gilt:

$$|D^\alpha v(y)| \leq c(m,n)|A|^m \sum_{|\beta|=m} |D^\beta u(F(y))|.$$

Integration liefert dann für $p < \infty$ die Abschätzungen

$$\|D^\alpha v\|_{L^p(G_2)} \leq c(m,n)|A|^m \sum_{|\beta|=m} \|(D^\beta u) \circ F\|_{L^p(G_2)}.$$

Die Verwendung der Transformationsformel ergibt dann

$$\begin{aligned}\|(D^\beta u) \circ F\|_{L^p(G_2)} &= \left(\int_{G_1} \Big|(D^\beta u)(x)\Big|^p |\det A^{-1}| dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= |\det A|^{-\frac{1}{p}} \|D^\beta u\|_{L^p(G_1)}.\end{aligned}$$

Also folgt insgesamt

$$
\begin{aligned}
|v|_{H^{m,p}(G_2)} &= \Big(\sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha v\|^p_{L^p(G_2)}\Big)^{\frac{1}{p}} \\
&\le c(m,n,p)|A|^m| \det A|^{-\frac{1}{p}} \Big(\sum_{|\beta|=m} \|D^\beta u\|^p_{L^p(G_1)}\Big)^{\frac{1}{p}} \\
&= c(m,n,p)|A|^m| \det A|^{-\frac{1}{p}} |u|_{H^{m,p}(G_1)}.
\end{aligned}
$$

Die zweite Abschätzumg des Satzes folgt dann aus der ersten, wenn man A durch A^{-1} ersetzt. Man beachte, dass im Allgemeinen $|A^{-1}| \neq |A|^{-1}$ ist. $\square$

Die soeben bewiesenen Abschätzungen sind ziemlich grob und außerdem isotrop, d.h. richtungsunabhängig. Es geht nämlich nur $|A|$, d.h. der größte Eigenwert von $(A^\top A)^{\frac{1}{2}}$ in die Abschätzung ein.

5.8 Folgerung. *Es sei T ein n–Simplex, T_0 das n–dimensionale Einheitssimplex und $F(\bar{x}) = A\bar{x} + b$ die affine Abbildung aus Lemma 2.4. Dann hat man unter den Voraussetzungen von Satz 5.5 für*

$$\bar{u}(\bar{x}) = u(F(\bar{x})) \quad (\bar{x} \in T_0)$$

die Abschätzungen

$$|\bar{u}|_{H^{m,p}(T_0)} \le c_1(m,n,p)\, \frac{h(T)^m}{\rho(T_0)^m} \rho(T)^{-\frac{n}{p}} |u|_{H^{m,p}(T)} \tag{5.9}$$

und

$$|u|_{H^{m,p}(T)} \le c_2(m,n,p)\, \frac{h(T_0)^m}{\rho(T)^m} h(T)^{\frac{n}{p}} |\bar{u}|_{H^{m,p}(T_0)}\ . \tag{5.10}$$

Beweis. Verwende Satz 5.5 und Lemma 2.4. $\square$

5.11 Satz. *Es sei T ein n–Simplex, T_0 das Einheitssimplex, und $F : T_0 \to T$, $F(\bar{x}) = A\bar{x} + b$ die kanonische affine Abbildung. Sind $k, m \in \mathbb{N}_0$, $p, q \ge 1$ so, dass die Einbettung*

$$H^{k+1,p}(T_0) \hookrightarrow H^{m,q}(T_0)$$

gilt, und ist

$$I_0 \in L\big(H^{k+1,p}(T_0),\ H^{m,q}(T_0)\big)$$

ein Interpolationsoperator, der $\mathbb{P}_k(T_0)$ invariant läßt, d.h.

$$I_0 s_0 = s_0 \ \forall\ s_0 \in \mathbb{P}_k(T_0),$$

so folgt für den durch

$$(Iu) \circ F = I_0(u \circ F)$$

definierten Interpolationsoperator $I \in L\big(H^{k+1,p}(T), H^{m,q}(T)\big)$ *die Fehlerabschätzung*

$$\begin{aligned} |u - Iu|_{H^{m,q}(T)} &\leq c\ \sigma(T)^m\ |T|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\ h(T)^{k+1-m}\ |u|_{H^{k+1,p}(T)} \\ &\leq c\ \sigma(T)^{m-n\min\{0,\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\}}\ h(T)^{k+1-m+n(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})}\ |u|_{H^{k+1,p}(T)} \end{aligned}$$

für jedes $u \in H^{k+1,p}(T)$ *mit* $c = c(k, m, p, q, T_0, \|I_0\|)$.

Beweis. Die Wohldefiniertheit des Interpolationsoperators I auf T ist klar wegen der Invertierbarkeit von F und Satz 5.5. Dieser liefert auch $L\big(H^{k+1,p}(T), H^{m,q}(T)\big)$. Sei nun $u \in H^{k+1,p}(T)$. Dann ist vermöge der vorausgesetzten Einbettungseigenschaft und Satz 5.5 auch $u \in H^{m,q}(T)$ und

$$|u - Iu|_{H^{m,q}(T)} \leq c|A^{-1}|^m|\det A|^{\frac{1}{q}}\ |(u - Iu) \circ F|_{H^{m,q}(T_0)}$$

nach Satz 5.5, und weiter

$$= c|A^{-1}|^m|\det A|^{\frac{1}{q}}|u \circ F - I_0(u \circ F)|_{H^{m,q}(T_0)}$$

nach Definition von I, und für jedes $s_0 \in \mathbb{P}_k(T_0)$

$$\leq c|A^{-1}|^m|\det A|^{\frac{1}{q}}\Big(|u \circ F - s_0|_{H^{m,q}(T_0)} + |I_0(s_0 - u \circ F)|_{H^{m,q}(T_0)}\Big).$$

Mit der Einbettungskonstante $\|E_0\|$ weiter

$$\leq c|A^{-1}|^m|\det A|^{\frac{1}{q}}(\|E_0\| + \|I_0\|)\ \|s_0 - u \circ F\|_{H^{k+1,p}(T_0)}.$$

Insgesamt ergibt dies mit einer nur von den behaupteten Parametern abhängenden Konstanten c

$$\begin{aligned} |u - Iu|_{H^{m,q}(T)} &\leq c|A^{-1}|^m|\det A|^{\frac{1}{q}} \inf_{s_0 \in \mathbb{P}_k(T_0)} \|s_0 - u \circ F\|_{H^{k+1,p}(T_0)} \\ &\leq c|A^{-1}|^m|\det A|^{\frac{1}{q}}\|u \circ F\|_{H^{k+1,p}(T_0)/\mathbb{P}_k(T_0)}\ , \end{aligned}$$

nach Satz 4.10 mit $G = T_0$

$$\leq c|A^{-1}|^m|\det A|^{\frac{1}{q}}|u \circ F|_{H^{k+1,p}(T_0)}$$

und nach Rücktransformation gemäß Satz 5.5

$$\leq c|A^{-1}|^m|A|^{k+1}|\det A|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}|u|_{H^{k+1,p}(T)}.$$

Lemma 2.4 liefert dann

$$\leq c\rho(T)^{-m}h(T)^{k+1}|T|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}|u|_{H^{k+1,p}(T)}.$$

Mit $c\rho(T)^n \leq |T| \leq ch(T)^n$ und $\sigma(T) = h(T)/\rho(T)$ erhält man schließlich

$$\leq c\rho(T)^{-m}h(T)^{k+1+n(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})}|u|_{H^{k+1,p}(T)}, \text{ falls } p \geq q,$$

und

$$\leq c\rho(T)^{n(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})-m}h(T)^{k+1}|u|_{H^{k+1,p}(T)}, \text{ falls } p \leq q$$

ist. Also insgesamt

$$\leq c\sigma(T)^{m-n\min\{0,\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\}}h(T)^{k+1-m+n(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})}|u|_{H^{k+1,p}(T)},$$

was zu beweisen war. □

Beispiel. Bei der Approximation linearer elliptischer Differentialgleichungen treten typischerweise die Fehlerabschätzungen

$$|u - u_h|_{H^1(G)} \leq c|u - Iu|_{H^1(G)}$$

auf. Außerdem wird später klar werden, dass je nach Regularität der Daten die kontinuierliche Lösung $u \in H^{k+1}(G)$ für ein $k \in \mathbb{N}$ ist. Demnach ist für uns in Satz 5.11 der Fall $k = 1$, $p = q = 2$ und $m = 1$ von besonderem Interesse. Die Einbettung $H^2(T_0) \hookrightarrow H^m(T_0)$ für $m = 0, 1$ ist trivial. Wir werden außerdem nachweisen, dass nach dem Sobolevschen Einbettungssatz

$$H^2(T_0) \hookrightarrow C^0(T_0) \tag{5.12}$$

gilt, wenn $2-\frac{n}{2} > 0$, d.h. die Raumdimension $n \leq 3$ ist. Dies gestattet es uns, für $n \leq 3$ einen in den Voraussetzungen von Satz 5.11 geforderten Interpolationsoperator $I_0 \in L(H^2(T_0), H^m(T_0))$ in einfacher Weise zu konstruieren. Wir wählen

$$I_0u_0 \in \mathbb{P}_1(T_0), \quad I_0u_0(\bar{a}_j) = u_0(\bar{a}_j)$$

für die Ecken $\bar{a}_j$ des Simplex T_0. u_0 ist wegen (5.12) punktweise definiert! I_0 ist offensichtlich linear, und mit den Basisfunktionen (baryzentrische Koordinaten zu T_0) $\varphi_j(\bar{x}) = \lambda_j(\bar{x})$, $(j = 0, \ldots, n)$ läßt sich I_0 so schreiben:

$$(I_0u_0)(\bar{x}) = \sum_{j=0}^{n} u_0(\bar{a}_j)\varphi_j(\bar{x})$$

und wie gefordert beschränken ($m = 0, 1$):

$$\|I_0 u_0\|_{H^m(T_0)} \le \sum_{j=0}^{n} |u_0(\bar a_j)| \; \|\varphi_j\|_{H^m(T_0)} \le \|u_0\|_{L^\infty(T_0)} \sum_{j=0}^{n} \|\varphi_j\|_{H^m(T_0)}$$
$$\le c\|u_0\|_{L^\infty(T_0)} \le c\|u_0\|_{H^2(T_0)}.$$

Damit sind die Voraussetzungen von Satz 5.11 erfüllt, und wir können schließen

$$|u - Iu|_{H^m(T)} \le c\,\sigma(T)^m h(T)^{2-m} |u|_{H^2(T)}$$

für $m = 0, 1$. Insbesondere also

$$\|u - Iu\|_{L^2(T)} \le c\; h(T)^2 |u|_{H^2(T)}, \quad \|\nabla(u - Iu)\|_{L^2(T)} \le c\;\sigma(T) h(T) |u|_{H^2(T)}.$$

Verlangen wir von einer Triangulierung $\mathcal{T}$, dass $\max\limits_{T\in\mathcal{T}} \sigma(T) \le c < \infty$ ist, so können wir aus mit (2.7) schließen, dass

$$\|\nabla(u - Iu)\|_{L^2(G)} \le c\; h|u|_{H^2(G)}$$

gilt, wobei $G = \big(\bigcup\limits_{T\in\mathcal{T}} T\big)^\circ$ sei.

Die elementweise Abschätzung des Interpolationsfehlers verwenden wir nun, um den Interpolationsfehler auf einem polygonalen Gebiet abzuschätzen.

5.13 Satz. *Es sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und durch $\mathcal{T}$ zulässig trianguliert. Weiter sei*

$$X_h = \{u_h \in C^0(\overline{G}) |\; u_h|_T \in \mathbb{P}_k(T),\; T \in \mathcal{T}\}.$$

Ist nun $p > \frac{n}{2}$, so gilt für den gemäß Lemma 3.6 erklärten Lagrange–Interpolationsoperator

$$Iu \in \mathbb{P}_k(T), \quad Iu = u \text{ auf } \mathbb{G}_k(T), \quad T \in \mathcal{T},$$

dass I auf $\mathbb{P}_k(T)$ invariant ist, $I \in L(H^{2,p}(G), X_h)$ gilt und für jedes $m \in \{0, 1\}$ und $s \in \mathbb{N}_0$ mit $1 \le s \le k$ die Interpolationsabschätzung

$$|u - Iu|_{H^{m,p}(G)} \le c_1 \Big(\sum_{T\in\mathcal{T}} \sigma(T)^{mp} h(T)^{(s+1-m)p} |u|^p_{H^{s+1,p}(T)} \Big)^{\frac{1}{p}}$$

für alle $u \in H^{s+1,p}(G)$ gilt. Ist $\sigma(T) \le \sigma$ ($T \in \mathcal{T}$), so folgt

$$|u - Iu|_{H^{m,p}(G)} \le c_1 \sigma^m h^{s+1-m} |u|_{H^{s+1,p}(G)}.$$

Außerdem gilt für alle $q > n$ und $m = 0, 1$

$$|u - Iu|_{H^{m,q}(G)} \le c_2 \Big(\sum_{T\in\mathcal{T}} \sigma(T)^{mq} h(T)^{q(1-m)} |u|^q_{H^{1,q}(T)} \Big)^{\frac{1}{q}} \le c_2 \sigma^m h^{1-m} |u|_{H^{1,q}(G)}.$$

Beweis. Die Existenz des Interpolationsoperators I ist nach Lemma 3.6 und der (noch zu beweisenden) Einbettung $H^{2,p}(G) \hookrightarrow C^0(\overline{G})$ klar (s. dazu auch vorheriges Beispiel).Die Fehlerabschätzungen für $u \in H^{s+1,p}(G)$ folgen so:

$$|u - Iu|^p_{H^{m,p}(G)} = \sum_{T \in \mathcal{T}} |u - Iu|^p_{H^{m,p}(T)}$$

mit Satz 5.11 weiter (hierzu ist $H^{s+1,p}(T_0) \hookrightarrow H^{m,p}(T_0)$, also $s+1 \geq m$, nötig),

$$\leq c \sum_{T \in \mathcal{T}} \sigma(T)^{mp} h(T)^{(s+1-m)p} |u|^p_{H^{s+1,p}(T)} \leq c\sigma^{mp} h^{(s+1-m)p} |u|^p_{H^{s+1,p}(G)}.$$

Der zweite Fall geht wegen $q > n$ und damit $H^{1,q}(G) \hookrightarrow C^0(\overline{G})$ analog. □

Die entsprechenden Sobolevschen Einbettungssätze werden im übernächsten Paragraphen nachgetragen.

2.6 Fehlerabschätzung für die Poissongleichung

An dieser Stelle ist es uns nun möglich, den Fehler zwischen kontinuierlicher und diskreter Lösung der Poissongleichung abzuschätzen.

6.1 Satz. *Es sei $G \subset \mathbb{R}^n$ mit $n \leq 3$ ein durch $\mathcal{T}$ zulässig trianguliertes beschränktes Gebiet. Die Triangulierung genüge der Bedingung $\sigma(T) \leq \sigma_0$, ($T \in \mathcal{T}$) mit einer nicht von der Gitterweite abhängigen Konstanten σ_0. Es sei weiter $u \in \mathring{H}^1(G)$ die schwache Lösung der Poissongleichung mit Nullrandwerten zur rechten Seite $f \in L^2(G)$,*

$$\int_G \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_G f \varphi \, dx \quad \forall \varphi \in \mathring{H}^1(G).$$

Sei für $k \in \mathbb{N}$

$$\mathring{X}_h = \{v_h \in C^0(\overline{G}) | \, v_h|_T \in \mathbb{P}_k(T)(T \in \mathcal{T}), v_h = 0 \text{ auf } \partial G\}$$

der Raum der Finiten Elemente k-ter Ordnung. Die diskrete Lösung $u_h \in \mathring{X}_h$ ist definiert durch

$$\int_G \nabla u_h \cdot \nabla \varphi_h \, dx = \int_G f \varphi_h \, dx \quad \forall \varphi_h \in \mathring{X}_h.$$

Liegt nun die kontinuierliche Lösung $u \in H^{s+1}(G)$ für ein $s \in \{1, \dots, k\}$, so gilt für den Fehler zwischen kontinuierlicher und diskreter Lösung:

$$|u - u_h|_{H^1(G)} \leq ch^s |u|_{H^{s+1}(G)}.$$

Die Konstante c hängt ab von n, s, k, σ_0 und G. Sie hängt nicht ab von u, f und h.

Beweis. $\mathring{X}_h = X_h \cap \{v_h = 0 \text{ auf } \partial G\} \subseteq X_h \subseteq H^1(G)$ ist aus 3.10 bekannt und wegen Satz 1.10.13 gilt $v_h \in \mathring{H}^1(G)$. Mit dem Ceá-Lemma 1.11 folgt

$$|u - u_h|_{H^1} \leq \inf_{\varphi_h \in \mathring{X}_h} |u - \varphi_h|_{H^1} .$$

Da $p = 2$ und $n \leq 3$ die Voraussetzungen von Satz 5.13 erfüllen, ist der in Lemma 3.6 erklärte Lagrange–Interpolationsoperator I wohldefiniert. Aus der Definition von I folgt $Iu = 0$ auf ∂G für $u \in \mathring{H}^1(G) \cap H^{s+1}(G)$, $s \in \{1, \dots, k\}$. Aus Satz 5.13 folgt, dass $Iu \in X_h$ und somit erhalten wir $Iu \in \mathring{X}_h$. Somit können wir in obiger Abschätzung $\varphi_h = Iu$ wählen und erhalten aus der Interpolationsabschätzung in Satz 5.13

$$|u - u_h|_{H^1} \leq \inf_{\varphi_h \in \mathring{X}_h} |u - \varphi_h|_{H^1} \leq |u - Iu|_{H^1} \leq c\, h^s\, |u|_{H^{s+1}} .$$

□

Zwar gibt es zu einer rechten Seite $f \in H^{-1}(G)$ eine schwache Lösung der Poissongleichung, jedoch impliziert die Mindestvoraussetzung $u \in H^2(G)$, dass $f = -\Delta u \in L^2(G)$ ist. Deshalb setzen wir dies gleich so voraus.

Die Verwendung der geringeren Differenzierbarkeitsordnung s im Satz trägt der Tatsache Rechnung, dass das von uns konstruierte Verfahren mit Finiten Elementen k-ter Ordnung auch eine Konvergenzordnung liefert, nämlich s, wenn die Lösung u nicht zur maximalen Regularitätsklasse $H^{k+1}(G)$ gehört. In diesem Sinn adaptiert sich das Verfahren an die reale Situation.

2.7 Einbettungssätze

Ein wichtiges Hilfsmittel aus der Analysis ist für uns der Sobolevsche Einbettungssatz, der aussagt, dass $H^{k,p}(G)$–Funktionen in $H^{k-1,p^*}(G)$ für ein $p^* > p$ liegen. In Analogie zur Poincaré Ungleichung sind besonders interessant Ungleichungen der Art

$$\|u\|_q \leq c\, \|\nabla u\|_p \, , \tag{7.1}$$

wobei die Konstante c und die Zahl q nicht von u abhängen soll. Außerdem kann bewiesen werden, dass für geeignete Zahlen k, p Funktionen aus $H^{k,p}(G)$ sogar in klassischen Funktionenräumen $C^{m,\alpha}(\overline{G})$ liegen.

Zuerst überlegen wir uns für welche q die Ungleichung (7.1) möglich ist im Falle von Funktionen $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Sei also $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), u \not\equiv 0$ und sei $\lambda > 0$. Wir setzen

$$u_\lambda(x) := u(\lambda x), \qquad x \in \mathbb{R}^n .$$

Man rechnet leicht nach

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |u_\lambda|^q \, dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} |u(\lambda x)|^q \, dx = \frac{1}{\lambda^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |u(y)|^q \, dy \,,$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_\lambda|^p \, dx = \lambda^p \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(\lambda x)|^p \, dx = \frac{\lambda^p}{\lambda^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(y)|^p \, dy \,.$$

Dies eingesetzt in (7.1) liefert

$$\frac{1}{\lambda^{\frac{n}{q}}} \left\| u \right\|_q \le c \frac{\lambda}{\lambda^{\frac{n}{p}}} \left\| \nabla u \right\|_p \,,$$

d.h.

$$\left\| u \right\|_q \le \lambda^{1 - \frac{n}{p} + \frac{n}{q}} \left\| \nabla u \right\|_p \,.$$

Wenn $1 - \frac{n}{p} + \frac{n}{q} \neq 0$ ist, kann man λ gegen 0 bzw. ∞ konvergieren lassen und erhält einen Widerspruch. Somit kann (7.1) nur gelten, wenn

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n} \tag{7.2}$$

gilt. Dies kann man auch alternativ schreiben als

$$q = \frac{np}{n-p} \,.$$

Interessanterweise erhält man die Bedingung (7.2) auch auf andere Weise. Dazu betrachten wir die Funktion $u(x) = |x|^s$ im Gebiet $G = B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$. Diese Funktion ist nach Beispiel 1.8.9 aus $H^{1,p}(G)$, falls $s > 1 - \frac{n}{p}$ gilt. Sei das so. Es ist aber auch $u \in L^{p^*}(G)$ für $s > -\frac{n}{p^*}$ - wieder nach Beispiel 1.8.9. Wir berechnen das maximal mögliche $p^* > p$. Dies ist gegeben durch $1 - \frac{n}{p} \ge -\frac{n}{p^*}$, und dies ist äquivalent zu der Bedingung $\frac{1}{p^*} \ge \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$, d.h. (7.2).

Lemma (Hölderungleichung). Es seien $p_k \in [1, \infty]$ mit

$$\frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_m} = 1$$

und $u_k \in L^{p_k}(G)$. Dann ist das Produkt $u_1 \cdot \ldots \cdot u_m \in L^1(G)$ und

$$\|u_1 \cdot \ldots \cdot u_m\|_{L^1(G)} \leq \|u_1\|_{L^{p_1}(G)} \cdots \|u_m\|_{L^{p_m}(G)}.$$

Der Beweis ist eine kleine Übungsaufgabe.

7.3 Satz (Erster Einbettungssatz). *Seien $G \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $k_1 \geq k_2$; $k_1, k_2 \in \mathbb{N}_0$; $p_1, p_2 \in [1, \infty)$. Dann gilt:*

$$\overset{\circ}{H}{}^{k_1,p_1}(G) \hookrightarrow \overset{\circ}{H}{}^{k_2,p_2}(G), \qquad \textit{falls} \quad k_1 - \frac{n}{p_1} \geq k_2 - \frac{n}{p_2}.$$

Insbesondere ist

$$\overset{\circ}{H}{}^{k,p}(G) \hookrightarrow L^{\bar{p}}(G) \quad \textit{mit} \quad \bar{p} = \frac{np}{n - kp}, \qquad \textit{falls} \quad kp < n\,.$$

Ist $\partial G \in C^{0,1}$, so gelten die obigen Aussagen auch ohne "$\circ$".

Beweis. (i) Wir beweisen die Aussage zunächst für Funktionen mit Null–Randwerten. Als Erstes wird gezeigt, dass für $p < n$

$$\overset{\circ}{H}{}^{1,p}(G) \hookrightarrow L^{p^*}(G)$$

mit $p^* = \frac{np}{n-p}$ gilt. Dazu nehmen wir an, dass $u \in C_0^1(G)$ ist und betrachten zunächst den Fall $p = 1$, also $1^* = \frac{n}{n-1}$. Dazu sei u durch 0 auf den $\mathbb{R}^n$ fortgesetzt. Dann ist für $i \in \{1, \ldots, n\}$

$$u(x) = \int_{-\infty}^{x_i} \partial_i u(x_1, \ldots, x_{i-1}, s, x_{i+1}, \ldots, x_n) ds,$$

also auch

$$|u(x)|^n \leq \prod_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{x_i} |\partial_i u(x_1, \ldots, x_{i-1}, s, x_{i+1}, \ldots, x_n)| ds.$$

Für $n > 1$ folgt demnach

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} |u(x)|^{\frac{n}{n-1}} dx_1 \quad &\leq \quad \int_{\mathbb{R}} \Big(\prod_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} |\partial_i u(x)| dx_i \Big)^{\frac{1}{n-1}} dx_1 \\
&\leq \quad \Big(\int_{\mathbb{R}} |\partial_1 u| dx_1 \Big)^{\frac{1}{n-1}} \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} |\partial_2 u| dx_2 \cdots \int_{\mathbb{R}} |\partial_n u| dx_n \Big)^{\frac{1}{n-1}} dx_1.
\end{aligned}$$

Mit der m–fachen Hölderungleichung für $m = n-1$, $p_k = n-1$ $(k = 1,\dots,n-1)$ schätzen wir weiter ab

$$\le \Big(\int\limits_{\mathbb{R}} |\partial_1 u| dx_1\Big)^{\frac{1}{n-1}} \Big(\int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}} |\partial_2 u| dx_2 dx_1\Big)^{\frac{1}{n-1}} \cdots \Big(\int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}} |\partial_n u| dx_n dx_1\Big)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Insgesamt wurde also gezeigt, dass gilt:

$$\int\limits_{\mathbb{R}} |u|^{\frac{n}{n-1}} dx_1$$
$$\le \Big(\int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}} |\partial_2 u| dx_2 dx_1\Big)^{\frac{1}{n-1}} \Big(\int\limits_{\mathbb{R}} |\partial_1 u| dx_1 \int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}} |\partial_3 u| dx_3 dx_1 \cdots \int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}} |\partial_n u| dx_n dx_1\Big)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Integriere diese Ungleichung bezüglich x_2, erhalte

$$\int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}} |u|^{\frac{n}{n-1}} dx_1 dx_2$$
$$\le \Big(\int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}} |\partial_2 u| dx_2 dx_1\Big)^{\frac{1}{n-1}} \int\limits_{\mathbb{R}}\Big(\int\limits_{\mathbb{R}} |\partial_1 u| dx_1 \int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}} |\partial_3 u| dx_3 dx_1 \cdots \int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}} |\partial_n u| dx_n dx_1\Big)^{\frac{1}{n-1}} dx_2,$$

und wende wieder die m–fache Hölderungleichung an.

$$\begin{aligned} \le &\Big(\int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}} |\partial_1 u| dx_2 dx_1\Big)^{\frac{1}{n-1}} \Big(\int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}} |\partial_2 u| dx_2 dx_1\Big)^{\frac{1}{n-1}} \times \\ &\times \Big(\int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}} |\partial_3 u| dx_3 dx_2 dx_1\Big)^{\frac{1}{n-1}} \cdots \Big(\int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}} |\partial_n u| dx_n dx_2 dx_1\Big)^{\frac{1}{n-1}}. \end{aligned}$$

Indem man so weiter fortfährt, erhält man die Ungleichung

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{n}{n-1}} dx \le \Big(\prod_{i=1}^{n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\partial_i u| dx\Big)^{\frac{1}{n-1}} \le \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\nabla u| dx\Big)^{\frac{n}{n-1}}$$

oder

$$\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{n}{n-1}} dx\Big)^{\frac{n-1}{n}} \le \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\nabla u| dx.$$

Das bedeutet aber, dass wir bewiesen haben, dass gilt:

$$\|u\|_{L^{1^*}(G)} \le \|\nabla u\|_{L^1(G)} \ . \tag{7.4}$$

(ii) Der Fall $p > 1$ wird auf diese Ungleichung zurückgeführt. Man verwende (7.4) für $|u|^\lambda$ mit einem noch zu wählenden $\lambda > 1$. Das ergibt:

$$\Big(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{\lambda n}{n-1}} dx\Big)^{\frac{n-1}{n}} \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla |u|^\lambda| dx \leq \lambda \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\lambda-1} |\nabla u| dx$$
$$\leq \lambda \Big(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{p'(\lambda-1)} dx\Big)^{\frac{1}{p'}} \Big(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}} .$$

Unser Ziel ist es, $\frac{\lambda n}{n-1} = p^* = \frac{np}{n-p}$ zu erhalten. Das bedeutet, dass $\lambda = \frac{p(n-1)}{n-p}$ zu wählen ist. Wegen $\frac{1}{p'} = \frac{p-1}{p}$ ist dann

$$(\lambda - 1)p' = \Big(\frac{p(n-1)}{n-p} - 1\Big) \frac{p}{p-1} = \frac{np}{n-p} = p^*.$$

Mit dieser Wahl von λ erhalten wir demnach die Ungleichung

$$\Big(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{p^*} dx\Big)^{\frac{n-1}{n}} \leq \lambda \Big(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{p^*} dx\Big)^{\frac{1}{p'}} \Big(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}} ,$$

also wegen

$$\frac{n-1}{n} - \frac{1}{p'} = \frac{n-1}{n} - \frac{p-1}{p} = \frac{n-p}{np} = \frac{1}{p^*}$$

auch

$$\|u\|_{L^{p^*}(G)} \leq \frac{p(n-1)}{n-p} \|\nabla u\|_{L^p(G)}. \tag{7.5}$$

Man beachte, dass der Koeffizient in dieser Ungleichung für $p \to n$, $p < n$ degeneriert. Das entspricht unserer Beobachtung, dass $H^{1,2}(G) \not\hookrightarrow L^\infty(G)$ $(n = 2)$ aus Beispiel 1.8.10.

(iii) Die Ungleichung (7.5) wurde nur für Funktionen $u \in C_0^1(G)$ bewiesen. Seien nun $u \in \mathring{H}^{1,p}(G)$ und $u_j \in C_0^1(G)$ $(j \in \mathbb{N})$ mit $\|u - u_j\|_{H^{1,p}(G)} \to 0$, $j \to \infty$. Wegen

$$\|u_j - u_k\|_{L^{p^*}(G)} \leq c\, \|\nabla(u_j - u_k)\|_{L^p(G)} \to 0 \quad (j, k \to \infty)$$

ist $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $L^{p^*}(G)$. Es gibt demnach nach Satz 1.8.2 eine Funktion $\tilde{u} \in L^{p^*}(G)$, so dass

$$\|u_j - \tilde{u}\|_{L^{p^*}(G)} \to 0 \quad (j \to \infty).$$

$\tilde{u}$ ist aber fast überall gleich u, denn da G beschränkt ist, folgt mit $p^* > p$

$$\|u - \tilde{u}\|_{L^p(G)} \le \|u - u_j\|_{L^p(G)} + \|u_j - \tilde{u}\|_{L^{p^*}(G)} |G|^{\frac{1}{p} - \frac{1}{p^*}} \to 0 \quad (j \to \infty),$$

also $u = \tilde{u}$ f. ü.

(iv) Der Fall

$$\mathring{H}^{k,p}(G) \hookrightarrow L^{\bar{p}}(G) \quad (kp < n)$$

wird auf den Fall $k = 1, \bar{p} = p^*$ wie folgt zurückgeführt: $u \in \mathring{H}^{k,p}(G)$ mit $kp < n$ impliziert $D^\alpha u \in \mathring{H}^{k-j,p}(G) \subset \mathring{H}^{1,p}(G)$ für $|\alpha| = j \in \{0, \dots, k-1\}$ und $p < n$. Also ist nach dem oben Bewiesenen $D^\alpha u \in L^{p^*}(G)$ für $p^* = \frac{np}{n-p}$, d.h. $u \in \mathring{H}^{k-1,p_1}(G)$ für $p_1 = \frac{np}{n-p}$. Wie oben folgt für $k \ge 2$

$$u \in \mathring{H}^{k-2,p_1^*}(G) = \mathring{H}^{k-2,p_2}(G) \quad \text{mit} \quad p_2 = p_1^* = \frac{np_1}{n - p_1} = \frac{n\frac{np}{n-p}}{n - \frac{np}{n-p}} = \frac{np}{n-2p},$$

da $p_1 < n$ äquivalent zu $2p < n$. Indem man dies so fortführt, erreicht man $\mathring{H}^{k,p}(G) \hookrightarrow L^{\bar{p}}(G)$ mit $\bar{p} = \frac{np}{n-kp}$, falls $kp < n$ ist.

(v) Der Beweis der allgemeinen Aussage benutzt den Fortsetzungsoperator $E : W^{1,p}(G) \to W_0^{1,p}(\tilde{G})$ aus Satz 1.10.14. Es gilt dann

$$\|u\|_{L^q(G)} \le \|Eu\|_{L^q(\tilde{G})} \le \|Eu\|_{H^{1,p}(\tilde{G})} \le c\,\|u\|_{H^{1,p}(G)}\,.$$

□

Aus unseren Beispielen sieht man, dass das Resultat optimal ist. Der zweite Sobolevsche Einbettungssatz behandelt die Einbettung von Sobolevräumen in die Hölderräume $C^{m,\alpha}$. Dabei bezeichnet

$$C^{m,\alpha}(\overline{G}) = \{v \in C^m(\overline{G}) |\, D^\beta u \in C^{0,\alpha}(\overline{G}), |\beta| = m\}.$$

7.6 Satz (Zweiter Einbettungssatz). *Unter den Voraussetzungen des vorigen Satzes gilt:*

$$\mathring{H}^{k,p}(G) \hookrightarrow C^{m,\alpha}(\overline{G})$$

für alle $0 \le \alpha \le \overline{\alpha}$, $m \in \mathbb{N}_0$, $k \in \mathbb{N}$, *falls*

$$k - m - \frac{n}{p} =: \overline{\alpha} \in (0,1)$$

ist. Für $\partial G \in C^{0,1}$, *so gilt die Aussage auch ohne* "$\circ$".

Beweis. (i) Wir betrachten $k = 1$, $m = 0$ und zeigen $\mathring{H}^{1,p}(G) \hookrightarrow C^{0,\overline{\alpha}}(\overline{G})$ mit $\overline{\alpha} = 1 - \frac{n}{p}$. Sei $u \in C_0^1(G)$ gegeben, dann setzen wir u durch 0 fort. Sei weiterhin $x, y \in \overline{G}$ beliebig. Mit $\rho = |x-y|$ definieren wir einen abgeschlossen Würfel Q_ρ mit Kantenlänge ρ, der x, y enthält. Mit Lemma 4.1 folgt

$$\begin{aligned}
\left|u(x) - \frac{1}{|Q_\rho|}\int_{Q_\rho} u\,dy\right| &\le \frac{d(Q_\rho)^n}{n\,|Q_\rho|}\int_{Q_\rho}\frac{|\nabla u|}{|x-y|^{n-1}}\,dy = c(n)\int_{Q_\rho}\frac{|\nabla u|}{|x-y|^{n-1}}\,dy \\
&\le c(n)\Big(\int_{Q_\rho}|\nabla u|^p\;dy\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\int_{Q_\rho}|x-y|^{(1-n)p'}\;dy\Big)^{\frac{1}{p'}} \\
&\le c(n)\Big(\int_{Q_\rho}|\nabla u|^p\;dy\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\omega_n\int_0^{c\,\rho} r^{(1-n)p'+n-1}\,dr\Big)^{\frac{1}{p'}} \\
&\le c(n)\,\|\nabla u\|_{L^p(G)}\,\rho^{1-n+\frac{n}{p'}} = c(n)\,|x-y|^{1-\frac{n}{p}}\,\|\nabla u\|_{L^p(G)}\,.
\end{aligned}$$

Vertauschen der Rollen von x und y ergibt

$$\left|u(y) - \frac{1}{|Q_\rho|}\int_{Q_\rho} u\,dx\right| \le c(n)\,|x-y|^{1-\frac{n}{p}}\,\|\nabla u\|_{L^p(G)}\,,$$

sodass mit Hilfe einer Nulladdition die Abschätzung

$$|u(x) - u(y)| \le c(n)\,|x-y|^{1-\frac{n}{p}}\,\|\nabla u\|_{L^p(G)}$$

folgt. Nach Bildung des Supremums über $x, y \in \overline{G}$ folgt somit die Abschätzung der Seminorm

$$|u|_{0,1-\frac{n}{p}} \le c(n)\,\|\nabla u\|_{L^p(G)}\,. \tag{7.7}$$

Zur Abschätzung der Supremumsnorm von u wähle einen abgeschlossenen Würfel Q mit $Q \supseteq \overline{G}$ und $d(Q) \sim d(G)$. Wie oben folgt

$$\left|u(x) - \frac{1}{|Q|}\int_Q u\,dy\right| \le c\,d(G)^{1-\frac{n}{p}}\,\|\nabla u\|_{L^p(G)}\,.$$

Also gilt

$$\begin{aligned}
|u(x)| &\le \left|u(x) - \frac{1}{|Q|}\int_Q u\,dy\right| + \left|\frac{1}{|Q|}\int_Q u\,dy\right| \\
&\le c\,d(G)^{1-\frac{n}{p}}\,\|\nabla u\|_{L^p(G)} + |G|^{\frac{1}{p'}-1}\,\|u\|_{L^p(G)} \\
&\le c(G)\,\|u\|_{\mathring{H}^{1,p}(G)}\,.
\end{aligned}$$

Erneute Supremumsbildung liefert

$$\|u\|_{C^0(\overline{G})} \leq c \,\|u\|_{\mathring{H}^{1,p}(G)} \,. \tag{7.8}$$

Die Abschätzungen (7.7) und (7.8) liefern die Behauptung für Funktionen aus $C_0^1(G)$. Da solche Funktionen in $\mathring{H}^{1,p}(G)$ dicht sind und $C^{0,\bar{\alpha}}(\overline{G})$ ein Banachraum ist, kann man die Behauptung für beliebige Funktionen aus $\mathring{H}^{1,p}(G)$ wie in Punkt (iii) des Beweises von Satz 7.3 erhalten.

(ii) Wir zeigen für $\partial G \in C^{0,1}$ die Einbettung $H^{1,p}(G) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(\overline{G})$. Der Beweis nutzt den Fortsetzungsoperator E aus Satz 1.10.14. Es gilt $Eu \in \mathring{H}^{1,p}(\widetilde{G})$ und $\operatorname{supp} Eu \subseteq \widetilde{G} \supseteq\supseteq G$. Es folgt mit (i)

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}(\overline{G})} \leq \|Eu\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\widetilde{G}})} \leq c \,\|Eu\|_{\mathring{H}^{1,p}(\widetilde{G})} \leq c \,\|u\|_{H^{1,p}(G)} \,.$$

(iii) Für den allgemeinen Fall sei $u \in H^{k,p}(G)$. Dann ist $D^\beta u \in H^{k-m,p}(G)$ für $|\beta| \leq m$.
Im Fall $k-m=1$ folgt mit (ii), dass $D^\beta u \in C^{0,\alpha} \Rightarrow u \in C^{m,\alpha}$.
Sei $k-m=2$. Nach Voraussetzung ist $k-m-\frac{n}{p} =: \gamma \in (0,1)$. Dies impliziert

$$\begin{aligned} 2 = k-m < 1+\frac{n}{p} &\Rightarrow p < n, \\ 2 = k-m > \frac{n}{p} &\Rightarrow p > \frac{n}{2}. \end{aligned}$$

Wegen $p < n$ existiert die Einbettung $H^{k-m,p}(G) \hookrightarrow H^{k-m-1,p^*}(G)$ und wegen $p^* > n \Leftrightarrow p > \frac{n}{2}$ folgt mit dem bisher gezeigten $H^{1,p^*} \hookrightarrow C^{0,\overline{\alpha}}$ mit

$$\overline{\alpha} = 1 - \frac{n}{p^*} = 1 - \frac{n(n-p)}{np} = 2 - \frac{n}{p} = k - m - \frac{n}{p}.$$

Die Fälle $k-m \geq 3$ folgen analog. □

7.9 Lemma. *Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes, konvexes oder beschränktes Lipschitz Gebiet und sei $p > n$. Dann gilt für die Oszillation von $u \in H^{1,p}(G)$:*

$$\operatorname{osc}_{G\cap B_R(x_0)} u = \sup_{x,y \in G\cap B_R(x_0)} |u(x)-u(y)| \leq c\, R^\gamma \|\nabla u\|_{L^p(G)} \tag{7.10}$$

mit $\gamma = 1 - \frac{n}{p}$ und einer nur von n, p und G abhängenden Konstanten c. Dabei ist $B_R(x_0)$ eine beliebige Kugel mit Mittelpunkt $x_0 \in \partial G$ im $\mathbb{R}^n$.

Beweis. Wir zeigen die Abschätzung (7.10) für $u \in C^1(\overline{G})$ und benutzen danach, dass solche Funktionen in $H^{1,p}(G)$ dicht sind. Lemma 4.1 für das Gebiet $G_R = G \cap B_R(x_0)$ liefert dann für $x, y \in G \cap B_R(x_0)$ die Ungleichung

$$|u(x)-u(y)| \leq |u(x) - \frac{1}{|G_R|}\int_{G_R} u\,dz| + |u(y) - \frac{1}{|G_R|}\int_{G_R} u\,dz|$$

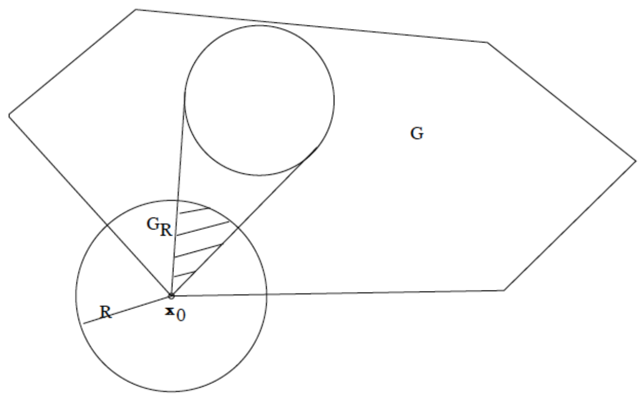


Abbildung 2.1: Geometrische Situation im Beweis von Lemma 7.9.

$$\leq c\,\frac{d(G_R)^{n+\gamma}}{|G_R|}\|\nabla u\|_{L^p(G)},$$

wobei wir die $L^p(G_R)$-Norm noch durch die $L^p(G)$-Norm abgeschätzt haben, und analog zum Beweis von (7.7) vorgegangen sind. Es ist $d(G_R) \leq 2\,R$. Wegen der Konvexität der offenen Menge G lässt sich nun nachweisen, dass $|G_R| \geq cR^n$ mit einer positiven Konstanten c gilt (siehe Abbildung 2.1). Das Volumen des in der Abbildung schraffierten Bereichs, des Schnitts eines Kegels (dessen Öffnungswinkel durch den lokalen Graphen des Randes nahe x_0 bestimmt ist) mit der Kugel $B_R(x_0)$, ist eine untere Schranke für das Volumen von G_R. Damit erhält man dann insgesamt

$$|u(x) - u(y)| \leq c\,R^\gamma\|\nabla u\|_{L^p(G)}$$

wie behauptet. $\square$

Kapitel 3

Theorie und Numerik elliptischer Differentialgleichungen zweiter Ordnung

In diesem Kapitel sollen Existenzsatz und Fehlerabschätzung für allgemeine lineare elliptische Differentialgleichungen zweiter Ordnung in Divergenzform bewiesen werden. Wir werden dabei sehen, dass sich unsere Methoden aus den vorhergenden Kapiteln sehr schnell und ziemlich einfach auf den Fall allgemeinerer Differentialgleichungen übertragen lassen. Die Differentialgleichungen haben die Form

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \partial_j(a_{ij}\partial_i u) - \sum_{i=1}^{n} \partial_i(a_i u) + \sum_{i=1}^{n} b_i \partial_i u + c\, u = f - \sum_{i=1}^{n} \partial_i H_i \text{ in } G, \tag{0.1}$$

wobei die Koeffizienten a_{ij}, a_i, b_i, c und die rechte Seite f und H_i für $i, j = 1, \ldots, n$ vorgegeben sind. Diese Differentialgleichung hat eine sogenannte Divergenzform. Dies macht sie unseren Methoden zugänglich. Wir geben Randwerte

$$u = g \quad \text{auf } \partial G \tag{0.2}$$

vor. Zu dieser Gleichung definieren wir die Bilinearform

$$B(u, \varphi) = \int_G \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\partial_i u \partial_j \varphi + \sum_{i=1}^{n} a_i u \partial_i \varphi + \sum_{i=1}^{n} b_i \partial_i u \varphi + c\, u\varphi \, dx \tag{0.3}$$

und das Funktional

$$F(\varphi) = \int_G f\varphi + \sum_{i=1}^{n} H_i \partial_i \varphi \, dx. \tag{0.4}$$

Die Bilinearform B ist im allgemeinen nicht symmetrisch.

0.5 Definition. *Eine Funktion u heißt* **schwache Lösung** *des Dirichletschen Randwertproblems (0.1), (0.2), falls $u \in H^1(G)$, $u - g \in \mathring{H}^1(G)$ und*

$$B(u, \varphi) = F(\varphi) \quad \forall \varphi \in \mathring{H}^1(G) \tag{0.6}$$

gilt.

3.1 Der funktionalanalytische Rahmen

In diesem Abschnitt werden die funktionalanalytischen Methoden formuliert, die zur Existenz einer schwachen Lösung führen. Diese Methoden helfen danach auch bei der Untersuchung der numerischen Approximation dieser Lösung durch Finite Elemente. Diese Methoden sind analog zu den für die Poissongleichung entwickelten Methoden.

Zuerst werden einige grundlegende Resultat über Hilberträume wiederholt.

1.1 Definition. *Ein* ***Prä-Hilbertraum*** *X ist ein Vektorraum über $\mathbb{R}$, in dem ein* ***Skalarprodukt*** *$(\cdot, \cdot)$ gegeben ist, d.h. eine Abbildung von $X \times X$ nach $\mathbb{R}$ mit den Eigenschaften:*

(i) $(\cdot, \cdot)$ *ist* **bilinear**, *d.h.*

$$(\alpha u + \beta v, w) = \alpha(u, w) + \beta(v, w)$$

für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und alle $u, v, w \in X$.

(ii) $(\cdot, \cdot)$ *ist* **symmetrisch**, *d.h.*

$$(u, v) = (v, u)$$

für alle $u, v \in X$.

(iii) $(\cdot, \cdot)$ *ist* **positiv definit**, *d.h.*

$$(u, u) \geq 0$$

für alle $u \in X$, und $(u, u) = 0$ genau für $u = 0$.

• Wir benutzen die Bezeichnung $\|u\| := \sqrt{(u, u)}$ und werden zeigen, dass $\|\cdot\|$ alle Eigenschaften einer Norm hat.

Wir notieren einige Standardfolgerungen aus den Eigenschaften des Skalarproduktes. Es gilt:

$$\|a+b\|^2 = \|a\|^2 + 2\,(a,b) + \|b\|^2, \tag{1.2}$$

$$\|a+b\|^2 + \|a-b\|^2 = 2\|a\|^2 + 2\|b\|^2\,. \tag{1.3}$$

1.4 Lemma (Cauchy-Schwarz). *Sei X ein Prä-Hilbertraum. Dann gilt für alle $u, v \in X$*

$$|(u,v)| \le \|u\|\,\|v\|\,.$$

Beweis. Es gilt

$$0 \le \big(\alpha u - \tfrac{1}{\alpha}v,\ \alpha u - \tfrac{1}{\alpha}v\big) = |\alpha|^2\,\|u\|^2 + \frac{1}{|\alpha|^2}\|v\|^2 - 2\,(\alpha u, \frac{1}{\alpha}v)\,,$$

und somit

$$2\,(u,v) \le |\alpha|^2\,\|u\|^2 + \frac{1}{|\alpha|^2}\|v\|^2\,.$$

Mit $\alpha = (\|v\|/\|u\|)^{\frac{1}{2}}$, $\|u\|, \|v\| \neq 0$, folgt

$$(u,v) \le \|u\|\,\|v\|\,.$$

Übergang von u zu $-u$ ergibt die behauptete Ungleichung für $u, v \neq 0$. Falls oBdA $u = 0$ ist, folgt die Ungleichung direkt aus $(0,v) = (0 \cdot v, v) = 0(v,v) = 0$ für alle $v \in X$. □

1.5 Lemma. *Sei X ein Prä-Hilbertraum. Dann gilt:*

(i) $\|\alpha u\| = |\alpha|\,\|u\|$, *(Homogenität)*,

(ii) $\|u+v\| \le \|u\| + \|v\|$, *(Dreiecksungleichung)*.

Beweis :

(i) $\|\alpha u\|^2 = (\alpha u, \alpha u) = |\alpha|^2\,\|u\|^2$

(ii) $$\begin{aligned}\|u+v\|^2 &\le \|u\|^2 + 2\,|(u,v)| + \|v\|^2 \\ &\le \|u\|^2 + 2\,\|u\|\|v\| + \|v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2\,.\end{aligned}$$

■

Lemma 1.5 und Definition 1.1 rechtfertigen folgende Definition.

1.6 Definition. $\|u\| := \sqrt{(u,u)}$ *ist die durch das Skalarprodukt in X* ***induzierte Norm****.*

1.7 Definition. *Ein* ***Hilbertraum*** *ist ein Prä-Hilbertraum, der bezüglich der induzierten Norm vollständig ist.*

1.8 Satz (Darstellungssatz von Riesz). *Es seien X ein Hilbertraum mit Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)_X$ und $f \in X'$. Dann gibt es genau ein $x_0 \in X$, so dass für alle $x \in X$ gilt:*
$$f(x) = (x, x_0)_X. \tag{1.9}$$

Beweis. Man beachte, dass der Beweis das Dirichletsche Prinzip (Satz 1.9.4) imitiert. So ist dieser Beweis historisch auch entstanden. Wir definieren das Funktional
$$I(x) = \frac{1}{2}\|x\|_X^2 - f(x).$$
Es liefert eine Abbildung $I : X \to \mathbb{R}$, und wir merken uns schon hier die einfache Relation
$$\|x\|_X^2 = 2I(x) + 2f(x), \tag{1.10}$$
Wir beweisen, dass es ein Minimum $x_0 \in X$ des Funktionals I auf X gibt. Dazu setzen wir
$$d = \inf_{v\in X} I(v).$$

1. Schritt: Klar ist, dass $d < \infty$ ist, denn $X \neq \emptyset$.

2. Schritt: I ist auf X nach unten beschränkt, $d > -\infty$, denn für $x \in X$ hat man nach der Definition der Norm im Dualraum
$$I(x) \geq \frac{1}{2}\|x\|_X^2 - \|f\|_{X'}\|x\|_X \geq (\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{2})\|x\|_X^2 - \frac{1}{2\varepsilon}\|f\|_{X'}^2$$
für jedes positive ε nach der Youngschen Ungleichung. Man wähle z. B. $\varepsilon = 1$.

3. Schritt: Nach der Definition des Infimums gibt es eine Folge $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$, $x_m \in X$, eine Minimalfolge, mit der Eigenschaft
$$I(x_m) \to d\,(m \to \infty).$$

4. Schritt: Die Minimalfolge ist eine Cauchyfolge. Dies sieht man mit der Parallelogrammgleichung (1.3) ein. Das ergibt dann
$$\begin{aligned}
\|x_m - x_n\|_X^2 &= 2\left(\|x_m\|_X^2 + \|x_n\|_X^2\right) - \|x_m + x_n\|_X^2 \\
&= 4I(x_m) + 4I(x_n) - 8I(\frac{x_m + x_n}{2}) \\
&\leq 4I(x_m) + 4I(x_n) - 8d \\
&\to 4d + 4d - 8d = 0
\end{aligned}$$
für $m, n \to \infty$.

5. Schritt: Da X vollständig ist, konvergiert die Cauchyfolge, d.h. es gibt ein $x_0 \in X$, so dass $\|x_m - x_0\|_X \to 0$ für $m \to \infty$.

6. Schritt: Da die Norm in einem normierten Raum stetig ist und f als Element des Dualraums nach Definition stetig ist, ist auch das Funktional I stetig, und wir erhalten

$$d = \lim_{m\to\infty} I(x_m) = I(\lim_{m\to\infty} x_m) = I(x_0).$$

Also ist auch

$$I(x_0) = \inf_{x\in X} I(x).$$

7. Schritt: Wie im Beweis von Satz 1.7.2 erhält man dann für das Minimum x_0 die gewünschte Gleichung (1.9), denn für $x \in X$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}$ ist auch $x_0 + \varepsilon x \in X$, und die Funktion $\phi(\varepsilon) = I(x_0 + \varepsilon x)$ hat in $\varepsilon = 0$ ihr Minimum. Aus

$$\phi(\varepsilon) = \frac{1}{2}\|x_0\|_X^2 + \varepsilon(x, x_0)_X + \frac{1}{2}\varepsilon^2\|x\|_X^2 - f(x_0) - \varepsilon f(x)$$

folgt dann wegen $\phi'(0) = 0$ die Behauptung.

Die Eindeutigkeit von x_0 ist klar. □

Dieser Rieszsche Darstellungssatz lässt sich nun zum allgemeinen Satz von Lax-Milgram erweitern, den wir dann verwenden werden, um die Existenz einer schwachen Lösung unserer Differentialgleichung zu beweisen.

1.11 Satz (Lax Milgram). *Es sei X ein Hilbertraum. Weiter sei $B : X \times X \to \mathbb{R}$ eine Bilinearform, die beschränkt (stetig),*

$$\exists\, c_1 \geq 0\ \forall x_1, x_2 \in X: \quad |B(x_1, x_2)| \leq c_1\|x_1\|_X\|x_2\|_X, \tag{1.12}$$

und koerziv,

$$\exists\, c_0 > 0\ \forall x \in X: \quad B(x, x) \geq c_0\|x\|_X^2, \tag{1.13}$$

ist. Sei weiter $f \in X'$. Dann gibt es genau ein $u \in X$, so dass für alle $\varphi \in X$

$$B(u, \varphi) = f(\varphi) \tag{1.14}$$

gilt. Außerdem gibt es (genau) ein $T \in L(X, X)$ mit $T^{-1} \in L(X, X)$ und

$$\|T^{-1}\|_{L(X,X)} \leq \frac{1}{c_0}, \qquad \|T\|_{L(X,X)} \leq c_1,$$

so dass für alle $x_1, x_2 \in X$ gilt:

$$(x_2, Tx_1)_X = B(x_1, x_2). \tag{1.15}$$

Dieser Satz gilt auch für komplexe Hilberträume, wenn B eine Sesquilinearform ist, d.h. linear im ersten Argument und antilinear im zweiten Argument ist.

Beweis. Für festes $x_0 \in X$ definiere $F : X \to \mathbb{R}$ durch

$$F(x) = B(x_0, x) \quad (x \in X).$$

Offensichtlich ist F linear und stetig mit $\|F\|_{X'} \leq c_1 \|x_0\|_X$. Nach dem Rieszschen Darstellungssatz Satz 1.8 gibt es dann genau ein Element (wir nennen es so:) $Tx_0 \in X$, so dass

$$B(x_0, x) = F(x) = (x, Tx_0)_X, \quad \forall x \in X$$

gilt. Damit ist die Abbildung $T : X \to X$ definiert. T ist linear, denn für jedes $x \in X$ und alle $x_1, x_2 \in X$ und alle $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ hat man

$$\begin{aligned}(x, T(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2))_X &= B(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, x) = \lambda_1 B(x_1, x) + \lambda_2 B(x_2, x) \\ &= \lambda_1 (x, Tx_1)_X + \lambda_2 (x, Tx_2)_X = (x, \lambda_1 Tx_1 + \lambda_2 Tx_2)_X.\end{aligned}$$

Da diese Gleichung für alle $x \in X$ gilt, erhalten wir

$$T(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 Tx_1 + \lambda_2 Tx_2.$$

T ist auch stetig, denn mit (1.12) folgt

$$\|Tx\|_X^2 = (Tx, Tx)_X = B(x, Tx) \leq c_1 \|x\|_X \|Tx\|_X$$

und demnach

$$\|Tx\|_X \leq c_1 \|x\|_X.$$

Hieraus folgt $\|T\|_{L(X,X)} \leq c_1$. T ist injektiv wegen der Koerzivität (1.13) von B. Mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung folgt

$$c_0 \|x\|^2 \leq B(x, x) = (x, Tx)_X \leq \|x\|_X \|Tx\|_X,$$

also

$$c_0 \|x\|_X \leq \|Tx\|_X.$$

Also folgt aus $Tx = 0$, dass $x = 0$ ist, und da T linear ist, impliziert dies die Injektivität der Abbildung T. Wenn wir gezeigt haben, dass T surjektiv ist, folgt hieraus $\|T^{-1}\|_{L(X,X)} \leq c_0^{-1}$. Der Bildbereich $R(T) = TX = \{y \in X \,|\, \exists x \in X : Tx = y\}$ ist abgeschlossen. Dazu sei $(y_m) \subset R(T)$ eine konvergente Folge: $y_m \to y$ $(m \to \infty)$. Es ist zu zeigen, dass es ein $x \in X$

gibt, so dass $y = Tx$ ist. Jedes y_m lässt sich als Bild darstellen, $y_m = Tx_m$, mit geeignetem $x_m \in X$. Diese Folge $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ ist aber eine Cauchyfolge, denn

$$c_0\|x_m - x_l\|_X \leq \|T(x_m - x_l)\|_X = \|Tx_m - Tx_l\|_X = \|y_m - y_l\|_X \to 0\,(m \to \infty).$$

Demnach gibt es ein x im Hilbertraum X, gegen das diese Folge konvergiert: $x_m \to x$ $(m \to \infty)$. Wegen der Stetigkeit von T erhält man dann schließlich $Tx = y$.

Nun ist aber T auch surjektiv, d.h. $R(T) = X$. Angenommen $R(T) \subsetneqq X$. Da $R(T)$ abgeschlossen ist, ist $\big(R(T), (\cdot,\cdot)_X\big)$ wieder ein Hilbertraum. Sei $x_1 \in X \setminus R(T)$. Dann definiert

$$F : R(T) \to \mathbb{R}, \quad y \mapsto (x_1, y)_X$$

ein stetiges lineares Funktional auf $R(T)$. Nach dem Riesz'schen Darstellungssatz existiert ein $x_2 \in R(T)$, so dass für alle $y \in R(T)$

$$(x_1, y)_X = F(y) = (y, x_2).$$

Daraus folgt $(x_1 - x_2, y)_X = 0$ für alle $y \in R(T)$. Sei nun $x_0 := x_1 - x_2$. Aus der Koerzivität folgt

$$c_0\|x_0\|_X^2 \leq B(x_0, x_0) = (x_0, Tx_0) = 0,$$

also $x_0 = 0$. Damit folgt aber $R(T) \ni x_2 = x_1 \notin R(T)$ ein Widerspruch.

Schließlich ist noch zu beweisen, dass es zu gegebenem Funktional $f \in X'$ genau ein $u \in X$ gibt, so dass für alle $\varphi \in X$ die Gleichung (1.14) gilt. Nach dem Rieszschen Darstellungssatz hat man genau ein $x_0 \in X$, so dass für alle $\varphi \in X$ gilt $f(\varphi) = (\varphi, x_0)_X$. Nach obigen Beweisschritten gibt es ein $u \in X$ mit $Tu = x_0$. Demnach hat man für alle $\varphi \in X$:

$$B(u, \varphi) = (\varphi, Tu)_X = (\varphi, x_0)_X = f(\varphi).$$

Die Eindeutigkeit von u ergibt eine erneute Anwendung der Koerzivität der Bilinearform. □

3.2 Schwache Lösungen

In der Einleitung zu diesem Kapitel haben wir der Differentialgleichung (0.1) die Bilinearform (0.3) zugeordnet. Außerdem haben wir eine rechte Seite (0.4) definiert. Nach den Resultaten des vorherigen Abschnitts müssen wir nun die Stetigkeit und die Koerzivität der Bilinearform - unter geeigneten

Annahmen an die Daten - nachweisen. Danach können wir den Satz von Lax-Milgram anwenden und erhalten die Existenz einer schwachen Lösung gemäß Definition 0.5.

Untersuchen wir zunächst die Stetigkeit von B auf $H^1(G)$. Dabei verwenden wir Eigenschaften der Koeffizienten der Differentialgleichung in dem Umfang, in dem sie uns im Moment nötig erscheinen. Diese werden dann im Existenzsatz vorausgesetzt. Einige dieser Bedingungen lassen sich noch abschwächen. Es ist für $v, w \in H^1(G)$

$$\begin{aligned}
|B(v,w)| &\leq \sum_{i,j=1}^{n} \|a_{ij}\|_{L^\infty(G)} \int_G |\partial_i v|\ |\partial_j w|\,dx + \sum_{i=1}^{n} \|a_i\|_{L^\infty(G)} \int_G |v|\ |\partial_i w|\,dx \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n} \|b_i\|_{L^\infty(G)} \int_G |\partial_i v|\ |w|\,dx + \|c\|_{L^\infty(G)} \int_G |v|\ |w|\,dx \\
&\leq \sum_{i,j=1}^{n} \|a_{ij}\|_{L^\infty(G)} \|\partial_i v\|_{L^2(G)} \|\partial_j w\|_{L^2(G)} \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n} \|a_i\|_{L^\infty(G)} \|v\|_{L^2(G)} \|\partial_i w\|_{L^2(G)} \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n} \|b_i\|_{L^\infty(G)} \|\partial_i v\|_{L^2(G)} \|w\|_{L^2(G)} + \|c\|_{L^\infty(G)} \|v\|_{L^2(G)} \|w\|_{L^2(G)} \\
&\leq C_1\ \|v\|_{H^1(G)} \|w\|_{H^1(G)},
\end{aligned}$$

mit der Konstanten

$$C_1 = \sum_{i,j=1}^{n} \|a_{ij}\|_{L^\infty(G)} + \sum_{i=1}^{n} \|a_i\|_{L^\infty(G)} + \sum_{i=1}^{n} \|b_i\|_{L^\infty(G)} + \|c\|_{L^\infty(G)} \tag{2.1}$$

Die Koerzivität der Bilinearform ist ohne zusätzliche Voraussetzung an die Koeffizienten nicht gegeben, wie man am folgenden Beispiel sieht.

Beispiel. Für den Spezialfall $G = (0,1)^2 \subset \mathbb{R}^2$, $a_{ij} = \delta_{ij}$, $a_i = b_i = 0$, $c = -2\pi^2$ gilt für die zugehörige Bilinearform

$$B(v,w) = \int_G \nabla v \cdot \nabla w\,dx - 2\pi^2 \int_G vw\,dx,$$

dass

$$B(v,v) = \int_G |\nabla v|^2\,dx - 2\pi^2 \int_G |v|^2\,dx = 0$$

für $v(x_1,x_2) = 0$ oder $v(x_1,x_2) = \sin(\pi x_1)\sin(\pi x_2)$ ist. Also kann B nicht koerziv sein.

Eine einfache Bedingung, die die Koerzivität sichert, ist die folgende sogenannte L–**Bedingung**: Es gibt eine Zahl $c_0 > 0$, so dass für alle $\xi = (\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j + \sum_{i=1}^{n} a_i\xi_0\xi_i + \sum_{i=1}^{n} b_i\xi_i\xi_0 + c\,\xi_0^2 \geq c_0 \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \tag{2.2}$$

fast überall in G gilt. Für $\xi_0 = 0$ ist das die sogenannte Elliptizitätsbedingung

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j \geq c_0|\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{2.3}$$

und für $\xi_1 = \cdots = \xi_n = 0$, $\xi_0 = 1$ impliziert (2.2), dass $c \geq 0$ fast überall in G ist.

Damit können wir den Existenz- und Eindeutigkeitssatz für schwache Lösungen von (0.1) beweisen.

2.4 Satz. *Genügen die Koeffizienten $a_{ij}, a_i, b_i, c \in L^\infty(G)$ auf dem beschränkten Gebiet $G \subset \mathbb{R}^n$ der Bedingung (2.2) und sind $g \in H^1(G)$, $f \in L^2(G)$, $H_i \in L^2(G)$ $(i, j = 1, \dots, n)$, so gibt es genau eine schwache Lösung $u \in H^1(G)$ der Differentialgleichung (0.1), d.h. es ist $u - g \in \mathring{H}^1(G)$ und*

$$\int_G \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\partial_i u \partial_j \varphi + \sum_{i=1}^{n} a_i u \partial_i \varphi + \sum_{i=1}^{n} b_i \partial_i u \varphi + c u \varphi \, dx = \int_G f\varphi + \sum_{i=1}^{n} H_i \partial_i \varphi \, dx$$

für alle $\varphi \in \mathring{H}^1(G)$. Außerdem hat man die a-priori–Abschätzung

$$\|u\|_{H^1(G)} \leq c_2 \left(\|f\|_{L^2(G)} + \sum_{i=1}^{n} \|H_i\|_{L^2(G)} + \|g\|_{H^1(G)}\right)$$

mit einer nur von C_1 aus (2.1), c_0 und der Poincaré-Konstanten des Gebiets G abhängenden Konstanten c_2.

Beweis. Mit der Bilinearform B aus (0.3) und dem Funktional F aus (0.4) transformieren wir das Problem durch $v := u - g$ auf Nullrandwerte. Dann ist ein $v \in X = \mathring{H}^1(G)$ gesucht, so dass für alle $\varphi \in X$

$$B(v, \varphi) = F(\varphi) - B(g, \varphi) =: \tilde{F}(\varphi)$$

ist. X ist ein Hilbertraum. Wir werden gleich zeigen, dass $\tilde{F} \in H^{-1}(G) = X'$ und B eine stetige, koerzive Bilinearform auf X ist. Der Satz 1.11 von Lax–Milgram liefert dann genau ein v und damit genau ein u wie verlangt. Die

Koerzivität von B zeigt man wie folgt. Für jedes $v \in \mathring{H}^1(G)$ ist

$$\begin{aligned} B(v,v) &= \int_G \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\partial_i v \partial_j v + \sum_{i=1}^n a_i v \partial_i v + \sum_{i=1}^n b_i \partial_i v v + c|v|^2 \, dx \\ &\geq c_0 \int_G \sum_{i=1}^n |\partial_i v|^2 \, dx \end{aligned}$$

für $\xi_0 = v(x)$, $\xi_i = \partial_i v(x)$ in (2.2). Wegen der Poincaréungleichung folgt

$$B(v,v) \geq C_0 \|v\|^2_{H^1(G)}$$

mit einer geeigneten Zahl $C_0 > 0$. Also ist B auf X koerziv. Leicht zeigt man mit der Stetigkeitskonstante C_1 von B, dass $\tilde{F} \in X'$ ist:

$$\begin{aligned} |\tilde{F}(\varphi)| &\leq |F(\varphi)| + |B(g,\varphi)| \\ &\leq \|f\|_{L^2(G)}\|\varphi\|_{L^2(G)} + \sum_{i=1}^n \|H_i\|_{L^2(G)}\|\nabla\varphi\|_{L^2(G)} + C_1\|g\|_{H^1(G)}\|\varphi\|_{H^1(G)} \\ &\leq \Big(\|f\|_{L^2(G)} + \sum_{i=1}^n \|H_i\|_{L^2(G)} + C_1\|g\|_{H^1(G)}\Big)\|\varphi\|_{H^1(G)} \end{aligned}$$

Die a-priori-Abschätzung folgt hieraus und aus der schwachen Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} C_0\|v\|^2_{H^1(G)} &\leq B(v,v) = \tilde{F}(v) \\ &\leq \Big(\|f\|_{L^2(G)} + \sum_{i=1}^n \|H_i\|_{L^2(G)} + C_1\|g\|_{H^1(G)}\Big)\|v\|_{H^1(G)}. \end{aligned}$$

Dies liefert eine Abschätzung für die $H^1(G)$-Norm von v und somit auch eine für die $H^1(G)$-Norm von u wegen der Ungleichung

$$\|u\|_{H^1(G)} \leq \|v\|_{H^1(G)} + \|g\|_{H^1(G)}.$$

Optimale Konstanten kann man leicht selbst herleiten. □

3.3 Diskrete Lösungen und Fehlerabschätzung

Für diesen Abschnitt nehmen wir an, dass die Voraussetzungen des Existenzsatzes Satz 2.4 erfüllt sind. Zunächst beweisen wir eine einfache abstrakte Fehlerabschätzung für Bilinearformen.

3.1 Satz. *Es seien X ein normierter Raum und $X_h \subset X$ ein Teilraum. Weiter sei $F \in X'$ ein lineares Funktional auf X. Durch $B : X \times X \to \mathbb{R}$ sei eine stetige und koerzive Bilinearform gegeben,*

$$|B(v,w)| \le c_1 \|v\|_X \|w\|_X, \quad B(v,v) \ge c_0 \|v\|_X^2 \qquad (v, w \in X),$$

Sind dann $u \in X$ und $u_h \in X_h$ Lösungen von

$$B(u,\varphi) = F(\varphi) \quad \forall \varphi \in X, \qquad B(u_h,\varphi_h) = F(\varphi_h) \quad \forall \varphi_h \in X_h,$$

so folgt die Fehlerabschätzung

$$\|u - u_h\|_X \le \frac{c_1}{c_0} \inf_{v_h \in X_h} \|u - v_h\|_X. \tag{3.2}$$

Außerdem gilt:

$$B(u - u_h, \varphi_h) = 0 \quad \forall \varphi_h \in X_h. \tag{3.3}$$

Die Relation (3.3) nennt man „Orthogonalität“ des Fehlers $u - u_h$. Für eine symmetrische Bilinearform B ist nach unseren Voraussetzungen durch $B(\cdot,\cdot)$ ein Skalarprodukt auf X gegeben. Daher kommt diese Bezeichnung.

Beweis. Wegen $X_h \subset X$ folgt für alle diskreten Testfunktionen $\varphi_h \in X_h$

$$B(u - u_h, \varphi_h) = B(u,\varphi_h) - B(u_h,\varphi_h) = F(\varphi_h) - F(\varphi_h) = 0,$$

also (3.3). Mit dieser „Orthogonalität des Fehlers“ folgt nun für jedes $v_h \in X_h$

$$\begin{aligned}
c_0 \|u - u_h\|_X^2 &\le B(u - u_h, u - u_h) = B(u - u_h, u) - B(u - u_h, u_h) \\
&= B(u - u_h, u) \\
&= B(u - u_h, u) - B(u - u_h, v_h) = B(u - u_h, u - v_h) \\
&\le c_1 \|u - u_h\|_X \|u - v_h\|_X,
\end{aligned}$$

also auch

$$\|u - u_h\|_X \le \frac{c_1}{c_0} \|u - v_h\|_X \quad \forall v_h \in X_h,$$

was (3.2) ergibt. □

Diskretisiert man die Randwerte g noch nicht, so lässt sich leicht folgendes Resultat nachweisen. Man beachte, dass die Lösung u_h keine diskrete Funktion aus X_h, sondern Summe einer diskreten Funktion und einer gegebenen Funktion ist.

3.4 Satz. *Es seien B und F wie in Satz 3.1, speziell $X = \mathring{H}^1(G)$ und $g \in H^1(G)$, wobei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet ist. Weiter sei $\mathring{X}_h \subset \mathring{H}^1(G)$ ein abgeschlossener[1] Teilraum. Dann gibt es genau eine Lösung $u_h \in g + \mathring{X}_h = \{g + v_h |\, v_h \in \mathring{X}_h\}$ von*

$$B(u_h, \varphi_h) = F(\varphi_h) \quad \forall \varphi_h \in \mathring{X}_h.$$

Beweis. Wir transformieren auf Nullrandwerte durch

$$\tilde{F}(\varphi) = F(\varphi) - B(g, \varphi) \quad (\varphi \in \mathring{H}^1(G)).$$

Wegen der Abgeschlossenheit ist $\mathring{X}_h$ ein Hilbertraum. Wir lösen mit dem Satz von Lax-Milgram das Problem ein $v_h \in \mathring{X}_h$ zu finden, so dass

$$B(v_h, \varphi_h) = \tilde{F}(\varphi_h) \quad \forall \varphi_h \in \mathring{X}_h$$

gilt. Die Voraussetzungen sind erfüllt. Danach setzen wir $u_h = v_h + g$ und sind fertig. □

Nun sind wir in der Lage die Existenz einer diskreten Lösung des Randwertproblems (0.1), (0.2) zu beweisen zusammen mit einer Abschätzung des Fehlers zwischen kontinuierlicher und diskreter Lösung.

3.5 Satz. *Es seien die Voraussetzungen des Existenzsatzes Satz 2.4 erfüllt, und u sei die dort konstruierte schwache Lösung. Das Gebiet G sei zulässig mit $\max_{T \in \mathcal{T}_h} \sigma(T) \leq \sigma$ trianguliert. Dabei sei σ unabhängig von h. Als diskreten Raum wählen wir*

$$X_h = \{v_h \in C^0(\overline{G}) |\, v_h|_T \in \mathbb{P}_k(T), T \in \mathcal{T}_h\} \tag{3.6}$$

für eine natürliche Zahl k und $\mathring{X}_h = X_h \cap \mathring{H}^1(G)$. Sei weiter $g_h \in X_h$. Dann gibt es genau eine diskrete Lösung $u_h \in X_h$ von (0.1), (0.2), d.h. $u_h - g_h \in \mathring{X}_h$ und

$$B(u_h, \varphi_h) = F(\varphi_h) \quad \forall \varphi_h \in \mathring{X}_h\,.$$

Liegt dann die schwache Lösung u in $H^{s+1}(G)$ und ist $g \in H^{s+1}(G)$ für ein $s \in \{1, \ldots, k\}$ mit $s > \frac{n}{2} - 1$, so folgt die Fehlerabschätzung

$$\|u - u_h\|_{H^1(G)} \leq ch^s \left(|u|_{H^{s+1}(G)} + |g|_{H^{s+1}(G)}\right) + c\|g - g_h\|_{H^1(G)}. \tag{3.7}$$

Wählt man für g_h die Interpolierende $g_h = Ig$ von g, so fehlt der letzte Term auf der rechten Seite in dieser Abschätzung. Die Konstanten in (3.7) sind abhängig von σ, C_0, C_1 und von der Konstanten C_I in der Interpolationsabschätzung aus Satz 2.5.13, jedoch nicht von der Gitterweite h.

[1] z. B. endlichdimensionaler

Beweis. Dass es genau ein u_h wie behauptet gibt, erschließt sich durch eine Anwendung von Satz 3.4. Dort wählt man für g die Funktion $g_h \in X_h$, X ist $\mathring{H}^1(G)$. Weiter verwendet man die Eigenschaft $X_h \subset H^1(G)$. Damit bleibt der Nachweis der Fehlerabschätzung (3.7). Für den Spezialfall $g = g_h = 0$ folgt sie sofort aus Satz 3.1 und der Interpolationsabschätzung. Genauer gilt

$$\begin{aligned}\|u - u_h\|_{H^1} &\leq c \inf_{v_h \in \mathring{X}_h} \|u - v_h\|_{H^1} \leq |u - Iu|_{L^2} + |u - Iu|_{H^1} \\ &\leq c\, h^{s+1} |u|_{H^{s+1}} + c\, h^{s+1-1} |u|_{H^{s+1}} \leq c h^s |u|_{H^{s+1}} .\end{aligned}$$

Für beliebige Randwerte ist ein Zusatzterm zu untersuchen. Dies tun wir nun. Wir transformieren auf Nullrandwerte, $\tilde{u} = u - g$, $\tilde{u}_h = u_h - g_h$. Dann ist

$$B(\tilde{u}, \varphi) = F(\varphi) - B(g, \varphi), \quad B(\tilde{u}_h, \varphi_h) = F(\varphi_h) - B(g_h, \varphi_h)$$

für alle Testfunktionen $\varphi \in \mathring{H}^1(G)$ und $\varphi_h \in \mathring{X}_h$. Wie im Beweis von Satz 3.1 erhält man für die Wahl $\varphi = \varphi_h$

$$B(\tilde{u} - \tilde{u}_h, \varphi_h) = -B(g - g_h, \varphi_h)$$

und mit den früher hergeleiteten Konstanten C_1 und C_0 für eine beliebige Funktion $\tilde{v}_h \in \mathring{X}_h$:

$$\begin{aligned}C_0 \|\tilde{u} - \tilde{u}_h\|^2_{H^1(G)} &\leq B(\tilde{u} - \tilde{u}_h, \tilde{u} - \tilde{u}_h) \\ &= B(\tilde{u} - \tilde{u}_h, \tilde{u} - \tilde{v}_h) + B(g - g_h, \tilde{u} - \tilde{v}_h) - B(g - g_h, \tilde{u} - \tilde{u}_h) \\ &\leq C_1 \big(\|\tilde{u} - \tilde{u}_h\|_{H^1(G)} \|\tilde{u} - \tilde{v}_h\|_{H^1(G)} \\ &\qquad + \|g - g_h\|_{H^1(G)} \|\tilde{u} - \tilde{v}_h\|_{H^1(G)} + \|g - g_h\|_{H^1(G)} \|\tilde{u} - \tilde{u}_h\|_{H^1(G)} \big)\end{aligned}$$

Dies ergibt die Ungleichung

$$\begin{aligned}\frac{C_0}{C_1} \|\tilde{u} - \tilde{u}_h\|^2_{H^1(G)} \leq& \|\tilde{u} - \tilde{u}_h\|_{H^1(G)} \|\tilde{u} - \tilde{v}_h\|_{H^1(G)} + \|g - g_h\|_{H^1(G)} \|\tilde{u} - \tilde{v}_h\|_{H^1(G)} \\ &+ \|g - g_h\|_{H^1(G)} \|\tilde{u} - \tilde{u}_h\|_{H^1(G)}.\end{aligned}$$

Wir verwenden nun die Young Ungleichung aus Lemma 1.7.7 mit $\epsilon = \frac{1}{2}\frac{C_0}{C_1}$ und erhalten die Abschätzung

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{C_0}{C_1} \|\tilde{u} - \tilde{u}_h\|^2_{H^1(G)} \leq& \frac{C_1}{C_0} \left(\|\tilde{u} - \tilde{v}_h\|^2_{H^1(G)} + \|g - g_h\|^2_{H^1(G)} \right) \\ &+ \|g - g_h\|_{H^1(G)} \|\tilde{u} - \tilde{v}_h\|_{H^1(G)}.\end{aligned}$$

Eine weitere Anwendung the Young Ungleichung liefert für alle $\tilde{v}_h \in \mathring{X}_h$

$$\|\tilde{u} - \tilde{u}_h\|_{H^1(G)} \leq C \left(\|\tilde{u} - \tilde{v}_h\|_{H^1(G)} + \|g - g_h\|_{H^1(G)} \right) \tag{3.8}$$

mit einer nur von C_0 und C_1 abhängenden Konstanten C.

Aus der Bemerkung nach Satz 1.10.13 folgt, dass für $u \in \mathring{H}^1(G)$ gilt $u|_{\partial G} = 0$ im $L^2(\partial G)$ Sinn. Nach unseren Voraussetzungen ist $\tilde{u} \in H^{s+1}(G) \cap \mathring{H}^1(G)$ mit einem $s > \frac{n}{2} - 1$. Der zweite Sobolevsche Einbettungssatz (Satz 2.7.6) garantiert dann, dass $\tilde{u} \in C^0(\overline{G}) \cap \mathring{H}^1(G)$ ist. Also ist $\tilde{u}|_{\partial G} = 0$ und die Interpolierende $I\tilde{u}$ gemäß Satz 2.5.13 liegt demnach in $\mathring{X}_h$. Wir dürfen also in (3.8) $\tilde{v}_h = I\tilde{u}$ wählen und erhalten mit Satz 2.5.13 die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|\tilde{u} - \tilde{u}_h\|_{H^1(G)} &\leq C\left(\|\tilde{u} - I\tilde{u}\|_{H^1(G)} + \|g - g_h\|_{H^1(G)}\right) \\ &\leq C\left(C_I h^s |\tilde{u}|_{H^{s+1}(G)} + \|g - g_h\|_{H^1(G)}\right). \end{aligned}$$

Wegen

$$|\tilde{u}|_{H^{s+1}(G)} = |u - g|_{H^{s+1}(G)} \leq |u|_{H^{s+1}(G)} + |g|_{H^{s+1}(G)}$$

und wegen

$$\|\tilde{u} - \tilde{u}_h\|_{H^1(G)} = \|(u - g) - (u_h - g_h)\|_{H^1(G)} \geq \|u - u_h\|_{H^1(G)} - \|g - g_h\|_{H^1(G)}$$

folgt dann insgesamt

$$\|u - u_h\|_{H^1(G)} \leq C\left(|u|_{H^{s+1}(G)} + |g|_{H^{s+1}(G)}\right) h^s + C\|g - g_h\|_{H^1(G)},$$

mit nur von σ, C_0, C_1 und C_I abhängenden Konstanten C. Man beachte, dass C_I auch von G, s, k und n abhängt. Wählt man $g_h = Ig$ so folgt

$$\|g - g_h\|_{H^1(G)} \leq c\, h^s\, |g|_{H^{s+1}}$$

und der Term kann absorbiert werden. Damit ist der Satz bewiesen. □

3.4 Das Neumann–Problem

Im folgenden sei G so, dass der Gaußsche Integralsatz gilt. Bisher wurden nur Dirichlet–Probleme untersucht, d.h. Probleme mit vorgeschriebenen Randwerten. Erinnern wir uns an das physikalische Beispiel aus der Einleitung, so sehen wir, dass es wichtig ist, Probleme vom Neumannschen Typ zu approximieren. Dies sind Probleme, bei denen eine geeignete Ableitung der Lösung in nicht–tangentialer Richtung auf dem Rand des Gebietes vorgeschrieben wird. Es reicht uns, das Modellproblem

$$-\Delta u = f \quad \text{in } G, \qquad \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{auf } \partial G \tag{4.1}$$

zu betrachten. Wieder lösen wir unser Problem durch Minimieren eines geeigneten Funktionals,

$$I(v) = \frac{1}{2}\int_G |\nabla v|^2\,dx - \int_G fv\,dx \quad \big(v \in X = H^1(G)\big).$$

Sei $u \in H^1(G)$ so, dass

$$I(u) \le I(v) \quad \forall v \in H^1(G)$$

ist. Ist $\varphi \in C^1(\overline{G})$ beliebig vorgegeben, so ist also für $\phi(\varepsilon) = I(u + \varepsilon\varphi)$,

$$\phi(0) \le \phi(\varepsilon) \quad (\varepsilon \in \mathbb{R}),$$

also auch $\phi'(0) = 0$, und das bedeutet

$$\int_G \nabla u \ \nabla\varphi\,dx - \int_G f\varphi\,dx = 0.$$

Ist nun u aus $C^2(\overline{G})$, so liefert eine partielle Integration, dass gilt:

$$\int_G (-\Delta u - f)\varphi\,dx + \int_{\partial G} \frac{\partial u}{\partial \nu}\varphi\,do = 0 \quad \forall \varphi \in C^1(\overline{G}). \tag{4.2}$$

Für jedes $\varphi \in C_0^1(G)$ ist also

$$\int_G (-\Delta u - f)\varphi\,dx = 0,$$

das heißt

$$-\Delta u = f \quad \text{in } G.$$

Indem wir dies in (4.2) einsetzen, folgt:

$$\int\limits_{\partial G} \frac{\partial u}{\partial \nu}\,\varphi\,do = 0 \quad \forall \varphi \in C^1(\overline{G}),$$

und das bedeutet, dass $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ auf ∂G ist. Also erfüllen Minima u aus $C^2(\overline{G})$ automatisch die Randbedingung (4.1). Diese Randbedingung ist deshalb eine natürliche Randbedingung für $-\Delta$, was praktisch zur Folge hat, dass wir sie gar nicht implementieren müssen.

Es ist klar, dass eine Lösung von (4.1) nur bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt ist. Das Problem (4.1) ist aber nicht für beliebige rechte Seiten lösbar, denn für glattes u und f hat man

$$\int_G f\,dx = \int_G -\Delta u\,dx = -\int\limits_{\partial G} \frac{\partial u}{\partial \nu}\,do = 0.$$

Der zugehörige schwache Existenzsatz lautet dann (beachte, dass $\frac{\partial u}{\partial \nu}\big|_{\partial G}$ nicht definiert ist!):

4.3 Satz. *Zu einem beschränkten Gebiet $G \subset \mathbb{R}^n$ und rechter Seite $f \in (H^1(G)/\mathbb{R})'$ gibt es eine bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmte schwache Lösung von*

$$-\Delta u = f \ \textit{in } G, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \ \textit{auf } \partial G,$$

d.h. es gibt genau ein $u \in H^1(G)/\mathbb{R}$, so dass für jedes $\varphi \in H^1(G)/\mathbb{R}$ gilt:

$$\int_G \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx = f(\varphi).$$

Beweis. Wir verwenden den Satz von Lax-Milgram für

$$\bar{v},\ \bar{w} \in X = H^1(G)/\mathbb{R}, \quad (\bar{v}, \bar{w})_X = \int_G \nabla v \cdot \nabla w \, dx,$$

wobei $\bar{v} = v + \mathbb{R}$, $\bar{w} = w + \mathbb{R}$ sind. X ist damit ein Hilbertraum, denn aus $(\bar{v}, \bar{v})_X = 0$ folgt, dass v konstant, also $\bar{v} = 0$ ist. Die Bilinearform

$$B(\bar{v}, \bar{w}) = \int_G \nabla v \cdot \nabla w \, dx \quad (\bar{v}, \bar{w} \in X)$$

ist wegen der Hölderungleichung und $B(\bar{v}, \bar{v}) = \|\nabla v\|_2^2$ stetig und koerziv, wobei wir Folgerung 2.4.11 benutzt haben. $f \in X'$ nach Voraussetzung. Damit gibt es genau ein $\bar{u} \in X$, so dass für alle $\bar{\varphi} \in X$

$$\int_G \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx = f(\varphi).$$

$\square$

4.4 Beispiel. Wenn die rechte Seite eine Funktion $f \in L^2(G)$ ist und wie üblich $f(\bar{\varphi}) = \int_G f\varphi \, dx$ $(\bar{\varphi} \in X)$ gewählt wird, dann ist zwar $f \in H^1(G)'$, aber wir benötigen $f \in X'$. Damit ist notwendig wegen $\bar{0} = \mathbb{R}$,

$$f(\bar{0}) = \int_G f \cdot 1 \, dx = 0. \tag{4.5}$$

Wir versuchen, die Beschränktheit von f in X' nachzuweisen. Dazu sei $\varphi \in H^1(G)$, $\bar{\varphi} = \varphi + \mathbb{R}$. Dann ist wegen (4.5)

$$|f(\bar{\varphi})| = |\int_G f\varphi \, dx| = |\int_G f(\varphi - ⨍_G \varphi \, dy) \, dx| \le \|f\|_{L^2(G)} \|\varphi - ⨍_G \varphi \, dx\|_{L^2(G)},$$

und wegen der Poincaréungleichung mit Mittelwert Null (Satz 2.4.2)

$$\le \|f\|_{L^2(G)} \, c \, \|\nabla \varphi\|_{L^2(G)} = c \, \|f\|_{L^2(G)} \|\bar{\varphi}\|_X.$$

Nachdem das theoretische Existenzproblem für (4.1) gelöst ist, versuchen wir Konvergenz für das analoge diskrete Problem nachzuweisen. Ein endlich-dimensionaler Teilraum von $X = H^1(G)/\mathbb{R}$ hilft uns praktisch nicht weiter, denn wie sollte man mit $\bar{u} = u + \mathbb{R}$ rechnen? Deshalb legen wir die freie Konstante durch

$$\int_G u\,dx = 0 \tag{4.6}$$

fest. Diese Bedingung ist gegenüber allen anderen Festlegungen der freien Konstante ausgezeichnet. Wegen

$$\begin{aligned}\|v+c\|^2_{H^1(G)} &= \|v+c\|^2_{L^2(G)} + \|\nabla v\|^2_{L^2(G)}\\ &= \|v\|^2_{L^2(G)} + 2c\int_G v\,dx + c^2|G| + \|\nabla v\|^2_{L^2(G)}\end{aligned}$$

lässt sich das Minimum der Funktion $\phi(c) = \|v+c\|^2_{H^1(G)}$ $(c \in \mathbb{R})$ ausrechnen. Es ist nämlich

$$\phi'(c) = 2\int_G v\,dx + 2c|G|, \quad \phi''(c) = 2|G| \geq 0$$

und demnach

$$\inf_{c\in\mathbb{R}} \phi(c) = \phi(c_0)$$

mit

$$c_0 = -\frac{1}{|G|}\int_G v\,dx = -\fint_G v\,dx.$$

Das bedeutet, dass wir bewiesen haben:

4.7 Lemma.

$$\|v\|_{H^1(G)/\mathbb{R}} = \|v - \fint_G v\,dx\|_{H^1(G)}$$

Demnach dürfen wir gleich mit Funktionen arbeiten, die Mittelwert Null besitzen, für die also (4.6) gilt.

Nach Satz 4.3 und Beispiel 4.4 gibt es zu $f \in L^2(G)$ mit $\int_G f\,dx = 0$ genau ein $u \in X := \{v \in H^1(G) \,\big|\, \int_G v\,dx = 0\}$ und

$$\int_G \nabla u\,\nabla\varphi\,dx = \int_G f\varphi\,dx \quad \forall \varphi \in X. \tag{4.8}$$

Hierbei wurde wieder verwendet, dass wegen Folgerung 2.4.11 der Raum X mit der Norm $\|v\|_X = \|\nabla v\|_{L^2(G)}$ ein Hilbertraum ist. Aufgrund der Eigenschaften von f ist (4.8) äquivalent zu

$$\int_G \nabla u\,\nabla\varphi\,dx = \int_G f\varphi\,dx \quad \forall \varphi \in H^1(G). \tag{4.9}$$

Die erste Formulierung ist besser für den Existenzbeweis, die zweite für die Implementierung. Man beachte die Asymmetrie der Räume für die Lösung und die Testfunktionen und vergleiche dies mit der entsprechenden Asymmetrie für das Dirichlet Problem.

Ist nun X_h ein endlichdimensionaler Teilraum von X, so gibt es genau ein $u_h \in X_h$ mit

$$\int_G \nabla u_h \, \nabla \varphi_h \, dx = \int_G f \varphi_h \, dx \quad \forall \varphi_h \in X_h.$$

Der abstrakte Satz 3.1 liefert dann die Fehlerabschätzung

$$\|u - u_h\|_X \leq c \inf_{v_h \in X_h} \|u - v_h\|_X \, .$$

Damit haben wir folgendes Resultat bewiesen.

4.10 Satz. *Das beschränkte Gebiet $G \subset \mathbb{R}^n$ sei zulässig trianguliert. Zu $f \in L^2(G)$ mit $\int_G f = 0$ sei $u \in H^1(G)$ mit $\int_G u = 0$ die schwache Lösung des Neumanns Randwertproblems, d.h. es gilt (4.9). Ist $X_h \subset H^1(G)$ ein endlichdimensionaler Raum mit*[2]

$$\inf_{v_h \in X_h} \|u - v_h\|_{H^1(G)} \leq c \, h^s |u|_{H^{s+1}(G)},$$

so gibt es genau eine diskrete Lösung $u_h \in X_h$ mit $\int_G u_h = 0$ und

$$\|u - u_h\|_{H^1(G)} \leq c \, h^s |u|_{H^{s+1}(G)}.$$

Die Diskretisierung des Neumannproblems gestaltet sich also einfacher als die Diskretisierung des Dirichletproblems. Ist $X_h = \operatorname{span}\{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\} \subset H^1(G)$, so ist das lineare Gleichungssystem

$$\sum_{j=1}^m u_j \int_G \nabla \varphi_j \, \nabla \varphi_k \, dx = \int_G f \varphi_k \, dx \quad (k = 1, \ldots, m) \tag{4.11}$$

zur Bestimmung von

$$u_h(x) = \sum_{j=1}^m u_j \; \varphi_j(x)$$

zu lösen. Es sind also keinerlei Randwerte zu implementieren. Allerdings ist (4.11) nicht eindeutig lösbar, denn u_h ist nur bis auf Konstanten eindeutig bestimmt. Als Nebenbedingung muss die Bedingung (4.6) implementiert werden, d.h.

$$\sum_{j=1}^m u_j \int_G \varphi_j \, dx = 0. \tag{4.12}$$

[2] Dies motiviert durch die Interpolationsabschätzung in Satz 2.5.13.

Die Neumann–Bedingung $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ auf ∂G ist, wie wir gesehen haben, die natürliche Randbedingung zu $-\Delta$. Man hüte sich aber davor anzunehmen, dass auch $\frac{\partial u_h}{\partial \nu} = 0$ auf ∂G ist. Am besten sieht man das am eindimensionalen Fall.

4.13 Beispiel. Ist u_h diskrete Lösung von

$$-u'' = f \text{ in } G = (0,1), \quad u'(0) = u'(1) = 0,$$

zu stückweise linearen Elementen, so folgt

$$|u_h'(0)| \le \frac{1}{\sqrt{3}} \|f\|_{L^2(0,h)} \sqrt{h}.$$

Um dies zu beweisen, nehmen wir an, dass die Triangulierung $\mathcal{T}$ von $(0,1)$ das Intervall $[0,h]$ enthält. Dann dürfen wir in der diskreten Gleichung

$$\int_0^1 u_h' \, \varphi_h' \, dx = \int_0^1 f \varphi_h \, dx \tag{4.14}$$

als Testfunktion die Basisfunktion zum linken Randknoten,

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x}{h}, & x \in [0,h] \\ 0, & x \in (h,1] \end{cases}$$

einsetzen. Auf $[0,h]$ sieht die diskrete Lösung so aus:

$$u_h(x) = u_0 + \frac{x}{h}(u_1 - u_0), \quad u_0 = u_h(0), \quad u_1 = u_h(h),$$

und demnach ist für alle $x \in [0,h]$

$$u_h'(x) = \frac{u_1 - u_0}{h} \ .$$

Aus (4.14) erhalten wir mit $\varphi_h = \varphi_0$,

$$\int_0^h \frac{u_1 - u_0}{h} \, (-\frac{1}{h}) \, dx = \int_0^h f(x) \, (1 - \frac{x}{h}) \, dx,$$

woraus folgt

$$u_h'(0) = \frac{u_1 - u_0}{h} = -\int_0^h f(x) \, (1 - \frac{x}{h}) \, dx,$$

und die rechte Seite ist im allgemeinen nicht gleich Null. Es folgt dann

$$|u_h'(0)| \le \Big(\int_0^h |f(x)|^2\,dx\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int_0^h (1-\frac{x}{h})^2\,dx\Big)^{\frac{1}{2}} = \|f\|_{L^2(0,h)} \sqrt{\frac{h}{3}}.$$

Man kann eine analoge Abschätzung von $\frac{\partial u_h}{\partial \nu}$ auf Randsimplexen in höheren Raumdimensionen herleiten.

3.5 Hilberträume

Wir erinnern:

5.1 Definition. *Eine Teilmenge M eines Hilbertraumes H heißt **dicht** in H, wenn es zu jedem $u \in H$ eine Folge $(u_j) \subseteq M$ gibt mit $u_j \to u$.*

5.2 Definition. *Ein Hilbertraum H heißt **separabel**, wenn es eine abzählbare, dichte Teilmenge in H gibt.*

Die meisten Hilberträume, die aus den Anwendungen kommen, sind separabel, z.B. $L^2(\Omega), H^1(\Omega)$.

5.3 Definition. *Ein **Orthogonalsystem** ist eine Menge $\{\, \varphi_j \in H \,\big|\, j \in \mathbb{N}, \varphi_j \neq 0 \,\}$ mit*

$$(\varphi_k, \varphi_j) = 0 \quad \forall j \neq k\,.$$

*Das Orthogonalsystem heißt **Orthonormalsystem**, wenn zusätzlich $\|\varphi_j\| = 1,\ j \in \mathbb{N}$. Ein Orthogonalsystem heißt **vollständig** in H, wenn $\operatorname{span}\{\, \varphi_j \,\big|\, j \in \mathbb{N} \,\}$ dicht in H ist. Hierbei ist $\operatorname{span}\{\varphi_j \,\big|\, j \in \mathbb{N}\}$ die Menge der endlichen Linearkombinationen von beliebigen Elementen aus dem System, d.h.*

$$\operatorname{span}\{\varphi_j \,\big|\, j \in \mathbb{N}\} := \Big\{ \sum_{j=1}^n \alpha_j \varphi_j \,\big|\, \alpha_j \in \mathbb{R}, j = 1, \dots, n \Big\}\,.$$

5.4 Lemma. *Sei $M = \{\, v_j \in H \,\big|\, j \in \mathbb{N} \,\}$. Dann gibt es Orthonormalsysteme $\{\, \varphi_j \in H \,\big|\, j \in \mathbb{N},\ \varphi_j \neq 0 \,\}$ mit $\operatorname{span} M = \operatorname{span}\{\varphi_j \,\big|\, j \in \mathbb{N}\}$.*

Beweis : Man führt einen Orthogonalisierungsprozess durch. O.B.d.A. dürfen wir annehmen, dass für jedes N die Elemente $v_1, v_2, \dots, v_N$ linear unabhängig sind. Setze

$$\varphi_1 := \frac{v_1}{\|v_1\|}$$

Sei φ_j schon konstruiert. Man setze

$$\tilde{\varphi}_{j+1} := v_{j+1} - \sum_{l=1}^{j} (v_{j+1}, \varphi_l)\, \varphi_l\,, \qquad \varphi_{j+1} := \frac{\tilde{\varphi}_{j+1}}{\|\tilde{\varphi}_{j+1}\|}\,.$$

Offensichtlich ist $\varphi_{j+1} \perp \varphi_l$, $1 \le l \le j$. Damit sind die φ_j durch vollständige Induktion definiert. Durch die Konstruktion erreicht man $\mathrm{span}\{\, \varphi_j \,\big|\, j \in \mathbb{N} \,\} = \mathrm{span}\{M\}$. ∎

5.5 Satz. *Jeder separable Hilbertraum H besitzt ein vollständiges Orthonormalsystem.*

Beweis : Aus der Definition 5.3 und Lemma 5.4 folgt offensichtlich die Behauptung, denn da H separabel ist, gibt es ein System $\{v_j \,\big|\, j \in \mathbb{N}\}$, so dass $\overline{\mathrm{span}\{v_j \,\big|\, j \in \mathbb{N}\}}^H = H$. ∎

5.6 Lemma. *Sei $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ ein Orthonormalsystem in einem Hilbertraum H. Dann ist für jedes $w \in H$, $N \in \mathbb{N}$*

$$\Big\| \sum_{j=1}^{N} (w, \varphi_j)\, \varphi_j \Big\|^2 = \sum_{j=1}^{N} |(w, \varphi_j)|^2 \le \|w\|^2\,.$$

Somit gilt auch $\sum_{j=1}^{\infty} |(w, \varphi_j)|^2 \le \|w\|^2 < \infty$.
Beweis : Es gilt

$$\begin{aligned}
0 &\le \Big\| w - \sum_{j=1}^{N} (w, \varphi_j)\, \varphi_j \Big\|^2 \\
&= \|w\|^2 - 2 \sum_{j=1}^{N} \big(w, (w, \varphi_j)\, \varphi_j\big) + \Big\| \sum_{j=1}^{N} (w, \varphi_j) \varphi_j \Big\|^2 \\
&= \|w\|^2 - 2 \sum_{j=1}^{N} (w, \varphi_j)\, (w, \varphi_j) + \sum_{j=1}^{N} |(w, \varphi_j)|^2 \\
&= \|w\|^2 - \sum_{j=1}^{N} |(w, \varphi_j)|^2\,.
\end{aligned}$$

Hieraus folgen die Aussagen des Lemmas. ∎

5.7 Satz. *Sei $\{\varphi_j\}$ ein vollständiges Orthonormalsystem in einem Hilbertraum H. Dann lässt sich jedes Element $u \in H$ als konvergente,* ***verallgemeinerte Fourierreihe***

$$u = \sum_{j=1}^{\infty} (u, \varphi_j)\, \varphi_j \tag{5.8}$$

darstellen und es gilt

$$\|u\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |(u, \varphi_j)|^2 \,. \tag{5.9}$$

Beweis : Nach Definition 5.3 gibt es zu $u \in H$ eine Folge $u^N = \sum_{j=1}^{N} \mu_j^N \varphi_j \to u \in H$. Es ist $\mu_k^N = (u^N, \varphi_k)$, wie man sich durch Multiplikation im Sinne des Skalarproduktes mit φ_k überlegt. Es gilt wegen Lemma 5.6

$$\Big\| \sum_{j=1}^{N} (u, \varphi_j)\, \varphi_j - u^N \Big\|^2 = \Big\| \sum_{j=1}^{N} (u - u^N, \varphi_j)\, \varphi_j \Big\|^2 \le \big\| u - u^N \big\|^2 .$$

Da $u^N \to u$, folgt somit

$$\Big\| \sum_{j=1}^{N} (u, \varphi_j)\, \varphi_j - u \Big\|^2 \to 0 \quad (N \to \infty)\,, \tag{5.10}$$

was (5.8) beweist. Aus (5.10) folgt

$$\sum_{j=1}^{N} |(u, \varphi_j)|^2 - 2 \sum_{j=1}^{N} (u, \varphi_j)\, (\varphi_j, u) + \|u\|^2 \to 0\,,$$

d.h.

$$\|u\|^2 - \sum_{j=1}^{N} |(u, \varphi_j)|^2 \to 0 \qquad (N \to \infty)\,.$$

Damit ist (5.9) bewiesen. ∎

Man kann sich überlegen, dass die Vollständigkeit eines Orthonormalsystems äquivalent zu Relation (5.9) ist.

5.11 Lemma. *Sei $\{\varphi_j\}$ ein Orthonormalsystem in einem Hilbertraum H. Wenn für alle $u \in H$ gilt:*

$$\|u\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |(u, \varphi_j)|^2 \,,$$

dann ist $\{\varphi_j\}$ ein vollständiges Orthonormalsystem.

Beweis : Sei $u \in H$. Im Beweis von Lemma 5.6 haben wir gezeigt:

$$\left\| u - \sum_{j=1}^{N} (u, \varphi_j)\varphi_j \right\|^2 = \|u\|^2 - \sum_{j=1}^{N} |(u, \varphi_j)|^2 .$$

Nach Voraussetzung konvergiert die rechte Seite gegen Null, d.h.

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{j=1}^{N} (u, \varphi_j)\varphi_j = u$$

und somit ist $\operatorname{span}\{\varphi_j \,\big|\, j \in \mathbb{N}\}$ dicht in H. ■

Beispiel. Das System

$$\{(2\pi)^{-\frac{1}{2}} e^{ikx}\}_{k\in\mathbb{Z}} \tag{5.12}$$

ist ein Orthonormalsystem in $L^2((-\pi, \pi); \mathbb{C})$. Auf dem komplexen Hilbertraum $L^2((-\pi, \pi); \mathbb{C})$ ist durch

$$(f, g) := \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, \overline{g(x)}\, dx$$

ein Skalarprodukt gegeben. Alle vorherigen Resultate gelten auch für komplexe Hilberträume. Aus

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{imx}\, dx = \frac{e^{im\pi} - e^{-im\pi}}{im} = 0 \qquad m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

folgt sofort, dass (5.12) ein Orthonormalsystem ist. Aufgrund der Relation

$$\cos mx = \frac{e^{imx} + e^{-imx}}{2}, \quad \sin mx = \frac{e^{imx} - e^{-imx}}{2i} \tag{5.13}$$

ist auch das System

$$\{(2\pi)^{-\frac{1}{2}}, \pi^{-\frac{1}{2}} \cos nx, \pi^{-\frac{1}{2}} \sin nx\}_{n\in\mathbb{N}} \tag{5.14}$$

ein Orthonormalsystem in $L^2((-\pi, \pi); \mathbb{R})$.

5.15 Satz. *Die Systeme (5.12) bzw. (5.14) sind vollständige Orthonormalsysteme im $L^2((-\pi, \pi); \mathbb{C})$ bzw. $L^2((-\pi, \pi); \mathbb{R})$.*

Beweis : Aufgrund der Beziehung (5.13) genügt es dies für eines der Systeme zu zeigen. Wir nehmen das System (5.12). Wir wissen bereits, dass das System (5.12) ein Orthonormalsystem ist. Da $C^\infty[-\pi,\pi]$ dicht in $L^2(-\pi,\pi)$ ist, reicht es zu zeigen, dass sich glatte Funktionen durch endliche Linearkombinationen von Funktionen aus (5.12), die wir mit $l_k := (2\pi)^{-1/2}e^{-ikx}$ bezeichnen, approximieren lassen. Sei also $f \in C^1[-\pi,\pi]$ und

$$P_n(f) := \sum_{|k|\le n} (f, l_k) l_k \,.$$

Nach Lemma 5.6 gilt

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |(f,l_k)|^2 \le \|f\|_{L^2}^2 < \infty\,,$$

und also für $m > n$

$$\|P_m(f) - P_n(f)\|_{L^2}^2 \le \sum_{|k|>n} |(f,l_k)|^2 \to 0 \qquad (n \to \infty)\,.$$

Somit ist $\big(P_n(f)\big)$ eine Cauchyfolge in $L^2(-\pi,\pi)$ und es existiert ein $\tilde f \in L^2(-\pi,\pi)$ so, dass $P_n(f) \to \tilde f$ in $L^2(-\pi,\pi)$ und für eine Teilfolge $P_{n_k}(f)(x) \to \tilde f(x)$ fast überall. Aufgrund des folgenden Lemmas erhalten wir $f = \tilde f$, was die Dichtheit von $\operatorname{span}\{l_k \,\big|\, k \in \mathbb{Z}\}$ in $L^2(-\pi,\pi)$ beweist. ■

5.16 Lemma. *Sei $f \in L^2(-\pi,\pi)$ und existieren $M, \alpha > 0$ so, dass*

$$\big|h^{-1}\big(f(x+h) - f(x)\big)\big| \le M \qquad \forall\, |h| < \alpha\,.$$

Dann konvergieren die n-ten Partialsummen $P_n(f)$ fast überall gegen f.

Die Voraussetzungen des Lemmas sind insbesondere für Lipschitz-stetige Funktionen erfüllt.

Beweis : Wir haben

$$\begin{aligned} P_n(f)(x) - f(x) &= \sum_{|k|\le n} (f - f(x), l_k) l_k(x) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \big(f(y) - f(x)\big) \sum_{|k|\le n} e^{-iky}\, dy\, e^{ikx} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \big(f(x-z) - f(x)\big) \sum_{|k|\le n} e^{ikz}\, dz \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \big(f(x-2y) - f(x)\big) \sum_{|k|\le n} e^{ik2y}\, dy\,,$$

wobei wir erst $z = x - y$ und dann $z = 2y$ substituiert haben. Mit Hilfe der Summenformel der geometrischen Reihe erhält man

$$\begin{aligned} \sum_{|k|\le n} e^{ikx} &= e^{-inx} \sum_{k=0}^{2n} e^{ikx} = e^{-inx} \frac{1 - e^{ix(2n+1)}}{1 - e^{ix}} \\ &= \frac{e^{ix(n+\frac{1}{2})} - e^{-ix(n+\frac{1}{2})}}{e^{\frac{ix}{2}} - e^{-\frac{ix}{2}}} = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})x)}{\sin\frac{x}{2}}\,, \end{aligned}$$

und somit

$$P_n(f)(x) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x-2y) - f(x)}{2y} \frac{2y}{\sin y} \sin((2n+1)y)\, dy\,,$$

d.h. $P_n(f)(x) - f(x)$ ist ein Fourierkoeffizient bzgl. des Systems (5.14) der Funktion

$$g(y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \chi_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]} \frac{f(x-2y) - f(x)}{2y} \frac{2y}{\sin y}\,,$$

welche aufgrund der Voraussetzungen eine L^2-Funktion ist. Lemma 5.6 liefert also $P_n(f)(x) - f(x) \to 0$ für $(n \to \infty)$, was die Behauptung ist. ∎

Mit Hilfe eines vollständigen Orthonormalsystems in $L^2(-\pi, \pi)$ kann man vollständige Orthonormalsysteme in $L^2(Q), Q = (-L, L)^n \subseteq \mathbb{R}^n$ konstruieren. Das System

$$l_k(x) = (2L)^{-\frac{1}{2}} e^{i\frac{\pi}{L}kx}, \quad k \in \mathbb{Z} \tag{5.17}$$

ist ein vollständiges Orthonormalsystem in $L^2(-L, L)$.

5.18 Folgerung. *Das System*

$$(2L)^{-\frac{n}{2}} e^{i\frac{\pi}{L}k\cdot x}\,, \tag{5.19}$$

wobei $k = (k_1, \dots, k_n), k_i \in \mathbb{Z}, i = 1, \dots, n,$ ein Multiindex ist, und $x = (x_1, \dots, x_n)$ ein Vektor im $\mathbb{R}^n$, ist ein vollständiges Orthonormalsystem in $L^2(Q)$, wobei $Q = (-L, L)^n$.

Beweis : Wir beweisen die Folgerung nur für $n = 2$, der allgemeine Fall folgt analog. Das System (5.19) kann als Produkt von Funktionen des Systems (5.17) geschrieben werden. Wir haben

$$(2L)^{-1}e^{i\frac{\pi}{L}(k_1x_1+k_2x_2)} = l_{k_1}(x_1)\cdot l_{k_2}(x_2)\,. \tag{5.20}$$

Man rechnet leicht nach, dass diese Funktionen ein Orthonormalsystem bilden. Aufgrund von Satz 5.7 und Lemma 5.11 ist das Orthonormalsystem (5.20) vollständig genau dann, wenn für alle $u \in L^2(Q)$, mit $Q = (-L, L)^2$ gilt:

$$\int_{-L}^{L}\int_{-L}^{L} |u(x,y)|^2\, dxdy = \sum_{j,k\in\mathbb{Z}}\left|\int_{-L}^{L}\int_{-L}^{L} u(x,y)\overline{l_j(x)l_k(y)}\, dxdy\right|^2. \tag{5.21}$$

Aus $u \in L^2(Q)$ folgt mit dem Satz von Fubini $u(x,\cdot) \in L^2(-L,L)$ für fast alle $x \in (-L,L)$. Da $\{l_k(y)\}$ ein vollständiges Orthonormalsystem in $L^2(-L,L)$ ist gilt für fast alle $x \in (-L,L)$

$$\begin{aligned}\int_{-L}^{L} |u(x,y)|^2\, dy &= \sum_{j\in\mathbb{Z}}\left|\int_{-L}^{L} u(x,y)\overline{l_j(y)}\, dy\right|^2\\ &=: \sum_{j\in\mathbb{Z}} |g_j(x)|^2\,.\end{aligned} \tag{5.22}$$

Da die $|g_j(x)|^2$ nichtnegative messbare Funktionen sind (Man wende den Satz von Fubini auf $u(x,y)\overline{l_j(y)} \in L^2(Q)$ an) kann man, nach einer Folgerung aus dem Satz von Levi über nichtnegative Reihen (Analysis III, Folgerung 8.4), (5.22) über $(-L,L)$ integrieren. Somit ist

$$\begin{aligned}\int_{-L}^{L}\int_{-L}^{L} |u|^2\, dy\, dx &= \sum_{j\in\mathbb{Z}}\int_{-L}^{L} |g_j(x)|^2\, dx\\ &= \sum_{j,k\in\mathbb{Z}}\left|\int_{-L}^{L} g_j(x)\overline{l_k(x)}\, dx\right|^2,\end{aligned}$$

wobei die Vollständigkeitsrelation (5.9) auf jedes der g_j angewendet wurde. Somit ist (5.21) bewiesen und das System (5.19) vollständig. ■

Der Folgenraum ℓ^2 ist definiert durch

$$\ell^2 := \Big\{(c_j)_{j\in\mathbb{N}}\,\Big|\, \sum_{j\in\mathbb{N}} |c_j|^2 < \infty\Big\}\,.$$

Versehen mit dem Skalarprodukt

$$(c,d)_{\ell^2} := \sum_{j\in\mathbb{N}} c_j\, d_j$$

ist ℓ^2 ein Hilbertraum. Wie der nächste Satz zeigt ist er von besonderer Bedeutung.

5.23 Satz. *Jeder separable unendlich-dimensionale Hilbertraum H ist isometrisch-isomorph zum Hilbertraum ℓ^2.*

Beweis : Sei $\{\varphi_j\}$ ein vollständiges Orthonormalsystem in H. Jedes $u \in H$ besitzt eine Darstellung

$$u = \sum_{j=1}^{\infty} (u,\varphi_j)_H\, \varphi_j\,.$$

Dem Element u ordnen wir die Folge

$$Tu = \big((u,\varphi_j)_H\big)_{j\in\mathbb{N}}$$

zu. Der so definierte Operator T ist offensichtlich linear. Satz 5.7 liefert, dass der Operator $T : H \to \ell^2$ stetig ist. Offensichtlich ist T eine bijektive Abbildung und somit invertierbar. Insbesondere ist

$$\begin{aligned}(u,v)_H &= \lim_{n\to\infty}\Big(\sum_{j=1}^{n}(u,\varphi_j)_H\varphi_j, \sum_{k=1}^{n}(v,\varphi_k)_H\varphi_k\Big)_H\\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}(u,\varphi_j)_H\,(v,\varphi_j)_H = (Tu,Tv)_{\ell^2}\,.\end{aligned}$$

Hieraus folgt sofort, dass T eine Isometrie ist und die Inverse stetig ist. ∎

Satz 5.23 ist nützlich, da gewisse Sätze über Hilberträume in dem recht anschaulichen Raum ℓ^2 bewiesen werden können.
Neben der Normkonvergenz gibt es in Hilberträumen einen weiteren, sehr wichtigen Konvergenzbegriff, nämlich die schwache Konvergenz.

5.24 Definition. *Eine Folge $(u_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset H$ in einem Hilbertraum H **konvergiert schwach** gegen ein Element u, in Zeichen*

$$u_j \rightharpoonup u \quad \text{oder} \quad u_j \rightharpoonup u \text{ schwach in } H\ (j\to\infty)$$

genau dann, wenn für alle $v \in H$

$$(u_j,v) \to (u,v) \qquad (j\to\infty)\,.$$

*Im Unterschied hierzu bezeichnet man die Konvergenz bezüglich der Norm als **starke Konvergenz**.*

Man kann sich leicht überlegen, dass der schwache Grenzwert einer Folge eindeutig bestimmt ist.

5.25 Lemma. *Es gilt:*

(a) *Falls $u_n \to u$ stark in H, dann konvergiert $u_n \rightharpoonup u$ schwach in H.*

(b) *Aus $u_n \rightharpoonup u$ schwach in H folgt*

$$\|u\| \le \liminf_{n\to\infty} \|u_n\| \,, \tag{5.26}$$

sowie die Beschränktheit der Folge $\big(\|u_n\|\big)_{n\in\mathbb{N}}$.

Beweis : (a) Für $u_j \to u$ folgt für alle $v \in H$

$$|(u_j, v) - (u, v)| \le \|u_j - u\|\,\|v\| \to 0 \qquad (j \to \infty)\,,$$

d.h. $u_j \rightharpoonup u$ schwach in H.

(b) Sei u_j eine schwach konvergente Folge mit Grenzwert u. Für alle $v \in H$ gilt:

$$|(u_j, v)| \le \|u_j\|\,\|v\| \,.$$

Aufgrund der schwachen Konvergenz von u_j erhalten wir

$$|(u, v)| = \lim_{j\to\infty} |(u_j, v)| \le \liminf_{j\to\infty} \|u_j\|\,\|v\| \,,$$

was sofort die Behauptung (5.26) liefert, wenn man $\|u\| = \sup\limits_{\|v\|=1} |(u, v)|$ beachtet. Die Beschränktheit der Folge $\big(\|u_n\|\big)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Folge des Prinzips der gleichmäßigen Beschränktheit, ein grundlegender Satz aus der Funktionalanalysis, welcher besagt, dass in vollständigen normierten Räumen eine „punktweise“ beschränkte Folge linearer, beschränkter Abbildungen gleichmäßig beschränkt ist. ∎

5.27 Lemma. *Sei $\{\varphi_j\}$ ein vollständiges Orthonormalsystem in H. Dann konvergiert*

$$\varphi_j \rightharpoonup 0 \quad \text{schwach in } H\,.$$

Beweis : Für $v \in H$ gilt

$$v = \sum_{j=1}^{\infty} (v, \varphi_j)\,\varphi_j \,.$$

Da nach Satz 5.7 $\sum_{j=1}^{\infty} |(v,\varphi_j)|^2$ konvergiert, gilt $(v,\varphi_j) \to 0, (j \to \infty)$. ∎

Da $\|\varphi_j\| = 1$, kann (φ_j) nicht stark (d.h. bezüglich der Normkonvergenz) gegen Null konvergieren. Man sieht also, dass die schwache Konvergenz verschieden („schwächer") von der starken Konvergenz ist.
Der folgende Satz ist ein Analogon des Satzes von Bolzano-Weierstraß.

5.28 Satz (Schwache Kompaktheit im Hilbertraum). *Sei $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in einem Hilbertraum H. Dann gibt es eine schwach konvergente Teilfolge $(u_k)_{k\in\Lambda}$, $\Lambda \subseteq \mathbb{N}$.*

Beweis : Wir führen das Problem auf den Fall eines separablen Hilbertraumes zurück, indem wir H_0 als Abschluß von $\operatorname{span}\{u_m \,|\, m \in \mathbb{N}\}$ betrachten. H_0 ist separabel, da die Menge der endlichen Linearkombinationen von Elementen u_m mit rationalen Koeffizienten einerseits abzählbar, andererseits dicht in H_0 ist. H_0 ist somit isometrisch isomorph zu ℓ^2 (siehe Satz 5.23), und Satz 5.28 übersetzt sich in die Aussage:
„Sei $c^k = (c_j^k)_{j\in\mathbb{N}} \in \ell^2$, $\sum_{j=1}^{\infty} |c_j^k|^2 \le K^2$, $k \in \mathbb{N}$. Dann gibt es eine Teilfolge $k \in \Lambda, \Lambda \subseteq \mathbb{N}$ und ein Element $c = (c_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \ell^2$ mit

$$\sum_{j=1}^{\infty} c_j^k \, \mu_j \to \sum_{j=1}^{\infty} c_j \, \mu_j \qquad (k \to \infty,\ k \in \Lambda)$$

für alle $\mu = (\mu_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \ell^2$. "
Aus den Voraussetzungen folgt für alle $j, k \in \mathbb{N}$

$$|c_j^k| \le K.$$

Mit Hilfe des Diagonalverfahrens erhalten wir also eine Teilfolge $k \in \Lambda$, $\Lambda \subseteq \mathbb{N}$ so, dass für alle $j \in \mathbb{N}$

$$c_j^k \to c_j \quad (k \to \infty, k \in \Lambda).$$

Diese Folge $k \in \Lambda$ ist bereits unsere gesuchte Teilfolge, denn es gilt zunächst für alle $N \in \mathbb{N}$

$$\sum_{j=1}^{N} |c_j|^2 = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{N} |c_j^k|^2 \le K^2\,,$$

und somit

$$\sum_{j=1}^{\infty} |c_j|^2 \le K^2\,,$$

d.h. $c \in \ell^2$. Weiterhin gilt für jedes $\mu \in \ell^2$

$$\Big|\sum_{j=1}^{\infty}(c_j - c_j^k)\,\mu_j\Big| \le \underbrace{\Big|\sum_{j=1}^{N}(c_j - c_j^k)\,\mu_j\Big|}_{=:\,A} + \underbrace{\Big|\sum_{j=N+1}^{\infty}(c_j - c_j^k)\,\mu_j\Big|}_{=:\,B}.$$

Der Term B lässt sich abschätzen durch

$$\begin{aligned} B &\le \Big(\sum_{j=N+1}^{\infty}|c_j - c_j^k|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{j=N+1}^{\infty}|\mu_j|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \\ &\le \big(\|c\|_{\ell^2} + \|c^k\|_{\ell^2}\big)\Big(\sum_{j=N+1}^{\infty}|\mu_j|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \le 2K\Big(\sum_{j=N+1}^{\infty}|\mu_j|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Da $\sum_{j=1}^{\infty}|\mu_j|^2$ konvergiert, existiert für alle $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, so dass $B \le \varepsilon$. Für dieses $N(\varepsilon)$ geht der Term A gegen 0 für $k \to \infty$, $k \in \Lambda$, da $c_j^k \to c_j$, $k \to \infty$, $k \in \Lambda$. Damit erhält man

$$\big|(c,\mu) - (c^k,\mu)\big| < 2\varepsilon \qquad (k \ge k_0(\varepsilon),\ k \in \Lambda)\,,$$

und die schwache Konvergenz $c^k \rightharpoonup c,\ k \in \Lambda$, ist bewiesen.
Damit haben wir für beliebige $v \in H_0$ die Konvergenz $(u_m, v) \to (u, v)$ $(m \to \infty,\ m \in \Lambda)$, $u = \sum_{j=1}^{\infty} c_j\,\varphi_j$, wobei (φ_j) ein Orthonormalsystem von H_0 ist, und damit auch $(u_m, w) \to (u, w)$, $w = w_1 + w_2$, $w_1 \in H_0$, $w_2 \in H_0^{\perp}$. Eine solche Zerlegung existiert immer (vgl. Übung) ∎

Wir wollen nun eine wichtige Klasse von Operatoren einführen.

5.29 Definition. *Ein linearer stetiger Operator $A : H_1 \to H_2$ heißt **kompakt**, wenn zu jeder beschränkten Folge $(u_n) \subset H_1$ eine in H_2 stark konvergente Teilfolge von (Au_m) existiert.*

Da H_1, H_2 metrische Räume sind, ist die Stetigkeit von A äquivalent zur Folgenstetigkeit von A. Damit kann man zeigen, dass ein linearer Operator $A : H_1 \to H_2$ genau dann kompakt ist, wenn aus $u_m \rightharpoonup u$ schwach in H_1 folgt $Au_m \to Au$ stark in H_2.
Seien H_1, H_2 Hilberträume für die $H_1 \subset H_2$ als Mengeninklusion gilt. Eine Abbildung $J : H_1 \to H_2$ heißt **Einbettung**, wenn J jedem Element u aus H_1 das Element u aufgefaßt als Element in H_2 zuordnet. Wenn die Einbettung J beschränkt ist, sagen wir dass H_1 stetig nach H_2 einbettet, in Zeichen $H_1 \hookrightarrow H_2$. Falls die Einbettung kompakt ist schreiben wir $H_1 \hookrightarrow\hookrightarrow H_2$.

5.30 Satz. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Dann ist die Einbettung $J : \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ kompakt.*

BEWEIS : Aus

$$\|u\|_{L^2} \leq \|u\|_{\mathring{H}^1}$$

folgt, dass J stetig ist. Da $\mathring{H}^1(\Omega)$ der Abschluss von $C_0^1(\Omega)$ in der $H^1(\Omega)$-Norm ist, können wir $\mathring{H}^1(\Omega)$ als Teilraum von $\mathring{H}^1(Q)$ mit einem Würfel $Q = [-\pi L, \pi L]^n \supseteq\supseteq \Omega$ betrachten.[3] Sei nun $(u_m) \subset \mathring{H}^1(Q)$ beschränkt. Dann besitzt $u_m \in L^2(Q)$ aufgrund von Lemma 5.18 und Satz 5.7 eine Fourierentwicklung

$$u_m = \sum_k c_k^m \frac{e^{i\frac{k\cdot x}{L}}}{(2\pi L)^{\frac{n}{2}}},$$

wobei die Summation über die Multiindizes $k = (k_1, k_2, \ldots, k_n)^\top, k_j \in \mathbb{Z}$, läuft. Die Koeffizienten c_k^m sind gegeben durch

$$c_k^m = \frac{1}{(2\pi L)^{\frac{n}{2}}} \int_Q u_m(x) e^{-i\frac{k\cdot x}{L}}\, dx\,.$$

Da auch $\partial_j u^m \in L^2(Q), j = 1, \ldots, n$, haben wir auch

$$\partial_j u^m = \sum_k d_k^{m,j} \frac{e^{i\frac{k\cdot x}{L}}}{(2\pi L)^{\frac{n}{2}}},$$

wobei

$$\begin{aligned} d_k^{m,j} &= \frac{1}{(2\pi L)^{\frac{n}{2}}} \int_Q \partial_j u^m(x) e^{-\frac{ik\cdot x}{L}}\, dx \\ &= \frac{1}{(2\pi L)^{\frac{n}{2}}} \int_Q u^m(x) e^{-\frac{ik\cdot x}{L}} \frac{ik_j}{L}\, dx \\ &= \frac{ik_j}{L} c_k^m\,. \end{aligned}$$

Aus der Beschränktheit der Folge $\|u_m\|_{\mathring{H}^1}$ folgt nach Satz 5.7 die Existenz einer Konstanten K, so dass für alle $m \in \mathbb{N}$

$$\sum_k |k|^2 |c_k^m|^2 \leq K\,, \qquad |c_{0,0,\ldots,0}^m|^2 \leq K\,. \tag{5.31}$$

Aus (5.31) folgt mit dem Diagonalverfahren, dass es eine Teilfolge $\Lambda \subseteq \mathbb{N}$ gibt so, dass für alle Multi-Indizes k

$$c_k^m \to c_k \qquad (m \in \Lambda,\, m \to \infty).$$

[3]Die Funktionen aus $\mathring{H}^1(\Omega)$ werden durch 0 auf $Q \setminus \Omega$ fortgesetzt.

Hieraus folgt, dass (c^m) eine Cauchyfolge in $\ell^2(\mathbb{Z}^n)$ ist, denn

$$\begin{aligned}\sum_k |c_k^m - c_k^j|^2 &\leq \sum_{|k|\leq N} |c_k^m - c_k^j|^2 + \frac{1}{N^2} \sum_{|k|\geq N} |k|^2\, |c_k^m - c_k^j|^2 \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2K}{N^2} < \varepsilon \qquad \text{für } m, j \geq l(\varepsilon)\,.\end{aligned}$$

Da $\ell^2(\mathbb{Z}^n)$ vollständig ist, haben wir gezeigt, dass $c^m \to c$ in ℓ^2. Auf die Fourier Reihe übertragen, impliziert die Konvergenz $c^m \to c$ in $\ell^2(\mathbb{Z}^n)$ die Konvergenz $u^m \to u\, (m \to \infty,\ m \in \Lambda)$ stark in $L^2(Q)$, wobei $c \in \ell^2(\mathbb{Z}^n)$ die Folge der Fourierkoeffizienten der u definierenden Reihe ist. ∎

5.32 Satz. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz-Rand $\partial\Omega \in C^{0,1}$. Dann ist die Einbettung $J : H^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ kompakt.*

Beweis : (i) Der eindimensionale Fall $\Omega = (a, b) =: I$.
Sei $(u_m) \subseteq H^1(I)$, $\|u_m\|_{H^1} \leq K$. Dann gilt aufgrund der Dichtheit von $C^1(\overline{I})$ in $H^1(I)$

$$|u_m(\eta) - u_m(\xi)| = \left|\int_\xi^\eta u_m'\, ds\right| \leq |\eta - \xi|^{1/2} \left(\int_I |u_m'|^2\, dt\right)^{1/2} \leq K|\eta - \xi|^{1/2}\,,$$

d.h. die (u_m) sind gleichgradig stetig. Die gleichgradige Beschränktheit folgt, da mit Hilfe der letzten Abschätzung gilt:

$$\left|\fint_I u_m(\eta)\, d\eta - u_m(\xi)\right| \leq \fint_I |u_m(\eta) - u_m(\xi)|\, d\eta \leq K \fint_I |\eta - \xi|^{1/2}\, d\eta \leq \tilde{K}\,,$$

wobei $\fint_I f(s)\, ds := \frac{1}{|I|}\int_I f(s)\, ds$ das *Mittelwertintegral* ist, und

$$\left|\fint_I u_m(\eta)\, d\eta\right| \leq |I|^{\frac{-1}{2}}\, \|u_m\|_{L^2}\,.$$

Nach dem Satz von Arzela-Ascoli gibt es daher eine Teilfolge, die gleichmässig und damit auch stark in $L^2(I)$ konvergiert.

(ii) Der allgemeine Fall. Der Beweis läuft wie im Beweis von Satz 5.30. Wir benutzen den stetigen Fortsetzungsoperator $E : H^1(\Omega) \to H_0^1(Q)$ aus Satz 1.10.14 um das Problem auf Nullrandwerte zurückzuführen. ∎

Auch in Banachräumen kann man schwache Konvergenz definieren und eine Analogie von Satz 5.28 beweisen.

5.33 Definition. *Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ eine Folge in einem Banachraum X. Man sagt, dass (x_n)* ***schwach gegen*** *x* ***konvergiert****, wenn für alle $f \in X^*$ gilt:*

$$\langle f, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle \qquad (n \to \infty)$$

Notation: $x_n \rightharpoonup x\,(n \to \infty)$

Um die schwache Konvergenz einer Folge von der Konvergenz bzgl. der Norm, d.h. $\|x_n - x\| \to 0$, zu unterscheiden werden wir diese wie im Hilbertraum als **starke Konvergenz** bezeichnen und durch $x_n \to x$ notieren.
Lemma 5.25 gilt analog für Banachräume. Um Satz 5.28 zu verallgemeinern benötigen wir einen weiteren Begriff. Sei X ein Banachraum, X^* sein Dualraum und $X^{**} := (X^*)^*$ sein Bidualraum. Die **kanonische Isometrie** $J : X \to X^{**}$ wird wie folgt definiert: sei $x \in X$ fest, die Abbildung $f \mapsto \langle f, x\rangle$ von X^* nach $\mathbb{R}$ ist ein beschränktes, lineares Funktional auf X^*, d.h. ein Element von X^{**}, das mit Jx bezeichnet wird. Wir haben also

$$\langle Jx, f\rangle_{X^{**},X^*} = \langle f, x\rangle_{X^*,X} \quad \forall x \in X, f \in X^*\,. \tag{5.34}$$

Es ist klar, dass J linear und eine Isometrie ist, d.h. $\|Jx\|_{X^{**}} = \|x\|_X$ für alle $x \in X$. In der Tat gilt:

$$\|Jx\|_{X^{**}} = \sup_{\|f\|_{X^*}\le 1} |\langle Jx, f\rangle| \overset{(5.34)}{=} \sup_{\|f\|_{X^*}\le 1} |\langle f, x\rangle| \overset{\text{Normformel}}{=} \|x\|\,.$$

Allerdings ist J nicht notwendig surjektiv. Man kann aber immer mit Hilfe von J den Raum X mit einem abgeschlossenen Unterraum von X^{**} identifizieren.

5.35 Definition. *Sei X ein Banachraum und sei $J : X \to X^{**}$ die durch (5.34) definierte kanonische Isometrie von X nach X^{**}. Dann heißt X* ***reflexiv*** *genau dann, wenn J surjektiv ist.*

5.36 Satz (Schwache Kompaktheit im Banachraum). *Sei $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in einem reflexiven Banachraum X. Dann gibt es eine schwach konvergente Teilfolge $(u_k)_{k\in\Lambda}$, $\Lambda \subseteq \mathbb{N}$.*

Dieser Satz wurde in der FA bewiesen.
Die in Hilberträumen definierten Begriffe "kompakter Operator" und "Einbettung" werden analog auf Banachräume übertragen.
Man kann die Sätze 5.30 und 5.32 auch auf Sobolevräume verallgemeinern. Wir geben hier nur die Resultate ohne Beweis an.

5.37 Satz (Kompakte Einbettung). *Seien $G \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $k_1 \geq k_2$; $k_1, k_2 \in \mathbb{N}_0$; $p_1, p_2 \in [1, \infty)$. Dann gilt:*

$$\mathring{H}^{k_1,p_1}(G) \hookrightarrow\hookrightarrow \mathring{H}^{k_2,p_2}(G), \qquad \text{falls} \quad k_1 - \frac{n}{p_1} > k_2 - \frac{n}{p_2}.$$

Insbesondere ist

$$\mathring{H}^{k,p}(G) \hookrightarrow\hookrightarrow L^{\bar{p}}(G) \quad \text{für} \quad \bar{p} < \frac{np}{n-kp}, \qquad \text{falls} \quad kp < n\,.$$

Ist $\partial G \in C^{0,1}$, so gelten die obigen Aussagen auch ohne "$\circ$".

5.38 Satz (Kompakte Einbettung). *Unter den Voraussetzungen des vorigen Satzes gilt:*

$$\mathring{H}^{k,p}(G) \hookrightarrow\hookrightarrow C^{m,\alpha}(\overline{G})$$

für alle $0 \leq \alpha < \overline{\alpha}$, $m \in \mathbb{N}_0$, $k \in \mathbb{N}$, falls

$$k - m - \frac{n}{p} =: \overline{\alpha} \in (0,1)$$

ist. Für $\partial G \in C^{0,1}$, so gilt die Aussage auch ohne "$\circ$".

3.6 Regularitätstheorie

Um die H^2-Regularität elliptischer partieller Differentialgleichungen zu beweisen benutzen wir den Differenzenquotienten. Für $0 < |h| < \frac{h_0}{2}$, $h_0 > 0$, wobei e_j, $j = 1, \ldots, n$, die Standardbasisvektoren des $\mathbb{R}^n$ sind, definieren wir durch

$$T_h(x) = T_{j,h}(x) := x + he_j \tag{6.1}$$

einen **Translationsoperator**. Der **Differenzenquotient** Δ_j^h ist definiert durch

$$\Delta_j^h u(x) := h^{-1}\big(u \circ T_{j,h}(x) - u(x)\big) = h^{-1}\big(u(x + he_j) - u(x)\big). \tag{6.2}$$

Für $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $\partial\Omega \in C^{0,1}$ bezeichnen wir

$$\Omega_h := \{x \in \Omega \,\big|\, \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > h\}.$$

Das folgende Lemma zeigt den Zusammenhang zwischen dem klassischen Differenzenquotienten und den schwachen Ableitungen auf.

6.3 Lemma. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet mit $\partial\Omega \in C^{0,1}$ und $u \in L^2(\Omega)$.*

(a) *Für $u \in H^1(\Omega)$ und $|h| \le h_0$ gilt:*

$$\left\| h^{-1}(u \circ T_{j,h} - u) \right\|_{L^2(\Omega_h)} \le \|\partial_j u\|_{L^2(\Omega)}\,, \quad j = 1, \dots, n\,.$$

(b) *Seien $h^{-1}(u \circ T_{j,h} - u) \in L^2(\Omega_{h_0})$ für alle $h_0 > 0$, $0 < h < h_0$ und gelte*

$$\left\| h^{-1}(u \circ T_{j,h} - u) \right\|_{L^2(\Omega_h)} \le C_1, \quad j = 1, \dots, n.$$

Dann existiert die verallgemeinerte Ableitung $\partial_j u$ und es gilt

$$\|\partial_j u\|_{L^2(\Omega)} \le C_1\,.$$

Beweis : (a) Da $C^1(\Omega)$ Funktionen dicht in $H^1(\Omega)$ sind reicht es die Ungleichung für solche Funktionen zu beweisen. Sei also $u \in C^1(\Omega)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_h} \left| h^{-1}(u(T_{j,h}(x)) - u(x)) \right|^2 dx &= \int_{\Omega_h} \Big| \int_0^1 \partial_j u(x + the_j)\, dt \Big|^2 dx \\
&\le \int_{\Omega_h} \int_0^1 |\partial_j u(x + the_j)|^2 \, dtdx \\
&\le \int_0^1 dt \int_\Omega |\partial_j u(y)|^2 \, dy\,,
\end{aligned}$$

was die Behauptung ist.
(b) Mit dem Diagonalverfahren wählen wir eine Folge $h_k \to 0$ so, dass $\Delta_j^{h_k} u \rightharpoonup w$ schwach in $L^2(\Omega')$ für alle $\Omega' \subseteq\subseteq \Omega$, was aufgrund der Voraussetzungen und Satz 5.28 möglich ist. Für $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ und $|h|$ klein genug haben wir

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \Delta_j^h u\, \varphi\, dx &= \int_\Omega h^{-1}(u(x + he_j) - u(x))\varphi(x)\, dx \\
&= - \int_\Omega (-h)^{-1} u(x)(\varphi(x - he_j) - \varphi(x))\, dx \\
&= - \int_\Omega u \Delta_j^{-h} \varphi\, dx\,.
\end{aligned} \tag{6.4}$$

Für obige Folge h_k konvergiert die linke Seite in (6.4) gegen $\int_\Omega w\varphi\, dx$ und die rechte Seite gegen $-\int_\Omega u \partial_j \varphi\, dx$. Somit ist $w \in L^2_{\text{loc}}(\Omega)$ ein Kandidat für die schwache Ableitung von u. Für $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ folgt auf Grund der Kompaktheit des Trägers von φ, der Konvergenz von $\Delta_j^{h_k} u$ gegen w, der Cauchy-Schwarz Ungleichung und den Voraussetzungen

$$\begin{aligned}\Big|\int_\Omega w\,\varphi\,dx\Big| &= \liminf_{h_k\to 0}\Big|\int_\Omega \Delta_j^{h_k} u\,\varphi\,dx\Big| \\ &\le \liminf_{h_k\to 0} \|\Delta_j^{h_k} u\|_{L^2(\Omega_{h_k})}\|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \le C_1\,\|\varphi\|_{L^2(\Omega)}\,.\end{aligned}$$

Eine Variante der Normformel

$$\|w\|_{L^2(\Omega)} = \sup_{\substack{\varphi\in C_0^\infty\Omega\\ \|\varphi\|_{L^2(\Omega)}\le 1}} \Big|\int_\Omega w\,\varphi\,dx\Big| \le C_1$$

liefert einerseits $w \in L^2(\Omega)$, und somit dass w die schwache Ableitung $\partial_j u$ von u ist, und andererseits die Abschätzung für $\partial_j u$. ■

Wir wollen nun die Grundideen der H^2-Regularität an einem einfachen Beispiel illustrieren. Oftmals sind Überlegungen einfacher, wenn man mit periodischen Funktionen arbeitet. Sei $Q = (-K, K)^n$ ein Würfel des $\mathbb{R}^n$ und sei $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine **periodische Funktion** mit Periode $2K$, d.h. $u(x + 2Ke_i) = u(x)$, $i = 1, \ldots, n$, wobei e_i die Standardbasisvektoren sind. Wir bezeichnen mit $H^k_{\text{per}}(Q)$ den Teilraum von $H^k(Q)$ der periodischen Funktionen versehen mit dem $H^k(Q)$-Skalarprodukt. Hierbei wird die Konvention benutzt, dass $H^0(Q) := L^2(Q)$ ist. Mit $\dot{H}^k_{\text{per}}(Q)$ bezeichnen wir den Teilraum von $H^k_{\text{per}}(Q)$ bestehend aus Funktionen mit Mittelwert Null. Aufgrund von Satz 2.4.2 ist $\|\nabla u\|_{L^2}$ eine äquivalente Norm auf $\dot{H}^1_{\text{per}}(Q)$.

Wir betrachten nun folgendes Problem für den Laplace-Operator: Sei $f \in \dot{L}^2_{\text{per}}(Q)$ gegeben. Wir suchen $u \in \dot{H}^1_{\text{per}}(Q) \cap H^2_{\text{per}}(Q)$ mit

$$-\Delta u = f \qquad \text{fast überall in } Q\,. \tag{6.5}$$

6.6 Lemma. *Für alle $f \in \dot{L}^2_{\text{per}}(Q)$ existiert genau eine Lösung $u \in \dot{H}^1_{\text{per}}(Q) \cap H^2_{\text{per}}(Q)$ des Problems (6.5). Diese Lösung erfüllt die Abschätzung*

$$\|u\|_{H^2} \le K\,\|f\|_{L^2}\,. \tag{6.7}$$

BEWEIS : Wir setzen

$$[u,v] := \sum_{i=1}^n \int_Q \partial_i u \partial_i v\,dx, \quad \langle F, v\rangle := \int_Q f v\,dx\,. \tag{6.8}$$

Dann ist F ein beschränktes lineares Funktional auf $\dot{H}^1_{\text{per}}(Q)$ und es gilt

$$[u,u] \geq \sum_{i=1}^{n} \|\partial_i u\|^2_{L^2} \geq c\, \|u\|^2_{H^1}$$

aufgrund von Satz 2.4.2. Das Lemma von Lax-Milgram (Satz 1.11) liefert die Existenz einer eindeutigen schwachen Lösung $u \in \dot{H}^1_{\text{per}}(Q)$ des Problems

$$[u,v] = \langle F, v\rangle \qquad \forall v \in \dot{H}^1_{\text{per}}(Q)\,. \tag{6.9}$$

Um zu zeigen, dass die Lösung u auch in $H^2_{\text{per}}(Q)$ liegt, benutzen wir Lemma 6.3. Offenbar ist

$$\Delta^h_j u(x) := h^{-1}(u(T_{j,h}(x)) - u(x))$$

wiederum eine Funktion aus $\dot{H}^1_{\text{per}}(Q)$. Somit können wir in (6.9) als Testfunktion $v = h^{-1}\Delta^h_j u(x)$ wählen und erhalten

$$\begin{aligned}\frac{1}{h^2}\int\limits_Q \sum_{i=1}^{n} &\partial_i u(x)\partial_i\big(u(T_h(x)) - u(x)\big)\, dx \\ &= \frac{1}{h^2}\int\limits_Q f(x)\big(u(T_h(x)) - u(x)\big)\, dx\,.\end{aligned}$$

Wenn man $v = h^{-1}\Delta^{-h}_j u = h^{-2}(u(x) - u(T_{-h}(x))$ als Testfunktion wählt und $y = x - he_j$ substituiert erhält man

$$\begin{aligned}\frac{1}{h^2}\int\limits_Q \sum_{i=1}^{n} &\partial_i u(T_h(x))\partial_i\big(u(T_h(x)) - u(x)\big)\, dx \\ &= \frac{1}{h^2}\int\limits_Q f(T_h(x))\big(u(T_h(x)) - u(x)\big)\, dx\,,\end{aligned}$$

wobei man noch ausnutzt, das aufgrund der Periodizität die Integrale über Q bzw. über $\{x + he_j \mid x \in Q\}$ gleich sind. Diese beiden Gleichungen voneinander abgezogen liefern

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\int\limits_Q \left|\partial_i \Delta^h_j u(x)\right|^2 dx &= \frac{1}{h^2}\int\limits_Q f(T_h(x)) - f(x)\big(u(T_h(x)) - u(x)\big)\, dx \\ &= \frac{-1}{h^2}\int\limits_Q f(x)\big(u(T_h(x)) - 2u(x) + u(T_{-h}(x))\big)\,.\end{aligned} \tag{6.10}$$

Mit der Bezeichnung $\varphi(x) = \Delta_j^h u(x)$ kann man den letzten Term schreiben als

$$-\frac{1}{h}\int_Q f(x)\big(\varphi(x) - \varphi(T_{-h}(x))\big)\,dx \le \|f\|_{L^2}\left\|h^{-1}(\varphi - \varphi\circ T_{-h})\right\|_{L^2} .$$

Unter Benutzung von Lemma 6.3 (a) und der Young-Ungleichung kann man die rechte Seite durch

$$\frac{1}{2}\|f\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\left\|\nabla\Delta_j^h u\right\|_{L^2}^2$$

abschätzen. Dies zusammen mit (6.10) ergibt

$$\left\|\nabla\Delta_j^h u\right\|_{L^2}^2 \le \|f\|_{L^2}^2 .$$

Lemma 6.3 (b) liefert nun

$$\sum_{j=1}^n \|\partial_j\nabla u\|_{L^2}^2 \le \|f\|_{L^2}^2 ,$$

d.h. $u \in H^2_{\text{per}}(Q)$, und die Abschätzung (6.7). Dies zusammen mit (6.8) für $v \in C^\infty_{\text{per}}(\Omega)$ liefert

$$-\sum_{i=1}^n \int_Q \partial_i^2 uv\,dx = \int_Q fv\,dx ,$$

woraus man sofort (6.5) fast überall folgert. ■

Im Fall von Dirichlet Randbedingungen ist die Regularitätstheorie deutlich technischer. Einerseits liegt der Differenzenquotient im Allgemeinen nicht in $\mathring{H}^1(G)$ und andererseits kann man nahe des Randes den Differenzenquotienten nicht in Normalenrichtung bilden. Die Lösung beider Probleme wird nun dargestellt. Wir betrachten auch gleich den Fall eines allgemeinen elliptischen Problems zweiter Ordnung.

Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. Zur Behandlung allgemeiner elliptischer Probleme haben wir folgende Notationen benutzt:

$$\begin{aligned} B(u,\,\varphi) &= \int_G \sum_{i,j} a_{ij}\partial_i u\,\partial_j\varphi + \sum_i a_i u\,\partial_i\varphi + \sum_i b_i\,\partial_i u\,\varphi + c\,u\,\varphi\,dx ,\\ F(\varphi) &= \int_G f\,\varphi + \sum_i H_i\,\partial_i\varphi\,dx . \end{aligned}$$

6.11 Satz (lokale H^2-Regularität). *Sei*

$$\begin{aligned} a_{ij}, a_i &\in C^1(G), \\ b_i, c &\in L^\infty(G), \\ f &\in L^2(G), \\ H_i, \text{ div } H &\in L^2(G), \end{aligned}$$

und seien a_{ij} elliptisch, d.h. für alle $x \in G$ gilt

$$\sum_{i,j}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq c_0|\xi|^2. \tag{6.12}$$

Ferner sei $u \in H^1(G)$ eine schwache Lösung von Problem (0.1), d.h. für alle $\varphi \in \overset{\circ}{H}{}^1(G)$ gilt

$$B(u, \varphi) = F(\varphi). \tag{6.13}$$

Dann ist $u \in H^2_{loc}(G)$ und für alle $G' \subseteq\subseteq G$ gilt die Abschätzung

$$\|u\|_{H^2(G')} \leq c\left(\|f\|_2 + \|\text{div } H\|_2 + \|u\|_{H^1(G)}\right). \tag{6.14}$$

Falls die Koeffizienten zusätzlich die Bedingung (2.2), d.h.

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j + \sum_{i=1}^{n} a_i\xi_0\xi_i + \sum_{i=1}^{n} b_i\xi_i\xi_0 + c\,\xi_0^2 \geq c_0 \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2$$

erfüllen, dann gilt

$$\|u\|_{H^2(G')} \leq c\left(\|f\|_2 + \|\text{div } H\|_2 + \sum_i \|H_i\|_2 + \|u\|_2\right), \tag{6.15}$$

wobei c nur von den Normen von a_{ij}, a_i, b_i, c und von dist $(\overline{G'}, \partial G)$ *abhängt.*

- $u \in H^1(G)$ nicht $\overset{\circ}{H}{}^1(G) \Rightarrow$ keine Randbedingungen beachtet,
- $H^2_{\text{loc}} = \{u : G \to \mathbb{R} \mid \forall G' \subseteq\subseteq G, u \in H^2(G')\}$
- mit Hilfe partieller Integration und des Fundamentallemmas der Variationsrechnung folgt aus Satz 6.11, dass (0.1) f.ü. in G gilt

Beweis : Für gegebenes $G' \subseteq\subseteq G$ wähle offene Mengen G'', G''', so dass $G' \subseteq\subseteq G'' \subseteq\subseteq G''' \subseteq\subseteq G$. Sei $\eta \in C_0^\infty(G'')$ eine Abschneidefunktion mit $0 \leq \eta \leq 1$, $\eta = 1$ auf G'. In der schwachen Formulierung (6.13) möchten wir $\varphi = \nabla(\eta^2 \nabla u)$ wählen. Dies ist aber nicht zulässig, da $\nabla(\eta^2 \nabla u)$ nicht in $\mathring{H}^1(G)$ liegt. Da der Differenzenquotient aber Gradienten approximiert, wählen wir

$$\varphi = -\Delta_k^{-h}(\eta^2\,\Delta_k^h\,u), \tag{6.16}$$

wobei $k \in \{1, \ldots, n\}$ fest, aber beliebig, ist und $|h| \le \min\big\{\operatorname{dist}(\overline{G''}, \partial G'), \operatorname{dist}(\overline{G''}, \partial G'''), \operatorname{dist}(\overline{G'''}, \partial G)\big\}$, als Testfunktion in (6.13). Die Information kommt von elliptischem Term und deshalb kommen alle anderen Terme auf die rechte Seite. Wir setzen

$$\tilde{F}(\varphi) := F(\varphi) - \int_G \sum_i a_i\,u\,\partial_i\varphi + \sum_i b_i\,\partial_i u\,\varphi + c\,u\,\varphi\,dx\,.$$

Die Gleichung $B(u, \varphi) = F(\varphi)$ ist dann äquivalent zu

$$I_1 := \int_G \sum_{i,j} a_{ij}\,\partial_i u\,\partial_j\varphi\,dx = \tilde{F}(\varphi)\,.$$

Wir wählen nun φ aus (6.16) und können mit Hilfe von $\partial_j\,\Delta_k^h\,u = \Delta_k^h\,\partial_j u$ und

$$\int_G v\Delta_k^{-h}\omega\,dx = -\int_G \Delta_k^h v\,\omega\,dx$$

den Term I_1 wie folgt umformen:

$$I_1 = -\int_G \sum_{i,j} a_{ij}\,\partial_i u\,\partial_j(\Delta_k^{-h}(\eta^2\Delta_k^h u))\,dx = \int_G \sum_{i,j} \Delta_k^h(a_{ij}\,\partial_i u)\partial_j(\eta^2\,\Delta_k^h u)\,dx\,.$$

Mit Hilfe der diskreten Produktregel

$$\Delta_k^h(w\,v)(x) = w(x + he_k)\,\Delta_k^h v(x) + v(x)\,\Delta_k^h w(x)$$

formen wir weiter um

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_G \sum_{i,j} a_{ij}(x + he_k)\,\Delta_k^h\partial_i u\,\partial_j(\eta^2\,\Delta_k^h u) + \Delta_k^h a_{ij}\,\partial_i u\,\partial_j(\eta^2\Delta_k^h u)\,dx \\
&= \int_G \sum_{i,j} a_{ij}(x + he_k)\Delta_k^h\,\partial_i u\,\Delta_k^h\partial_j u\,\eta^2 + a_{ij}(x + he_k)\,\Delta_k^h\partial_i u\,\Delta_k^h u\,2\eta\,\partial_j\eta \\
&\qquad + \Delta_k^h a_{ij}\,\partial_i u\,\Delta_k^h\partial_j u\,\eta^2 + \Delta_k^h a_{ij}\,\partial_i u\,\Delta_k^h u\,2\eta\,\partial_j\eta\,dx \\
&=: I_{1,1} + \ldots + I_{1,4}\,.
\end{aligned}$$

Aus (6.12) folgt dann mit $\xi_i = \Delta_k^h \partial_i u$

$$I_{1,1} \geq c_0 \int_G |\Delta_k^h \nabla u|^2 \eta^2 \, dx = c_0 \big\| (\Delta_k^h \nabla u)\eta \big\|_2^2 .$$

Die anderen Terme werden wie folgt abgeschätzt:

$$\begin{aligned}
|\, I_{1,2} \,| &\leq 2 \sum_{i,j} \|a_{ij}\|_{\infty,G'''} \int_G |\, \Delta_k^h \partial_i u \,|\,|\, \Delta_k^h u \,|\,|\, \partial_j \eta \,|\, \eta \, dx \\
&\leq c \big\| (\Delta_k^h \nabla u)\eta \big\|_2 \big\| \Delta_k^h u \big\|_{2,G''} \|\nabla \eta\|_\infty \\
&\leq \varepsilon \big\| (\Delta_k^h \nabla u)\eta \big\|_2^2 + c(\varepsilon,\, a_{ij},\, \nabla\eta) \big\| \Delta_k^h u \big\|_{2,G''}^2 \\
&\leq \varepsilon \big\| (\Delta_k^h \nabla u)\eta \big\|_2^2 + c \|\nabla u\|_{2,G'''}^2 ,
\end{aligned}$$

wobei wir auch Lemma 6.3 (b) benutzt haben,

$$\begin{aligned}
|\, I_{1,3} \,| &\leq \sum_{i,j} \|\nabla a_{ij}\|_{\infty,G'''} \int_G |\, \partial_i u \,|\,|\, \Delta_k^h \partial_j u \,|\, \eta^2 \, dx \\
&\leq c(a_{ij},\, \varepsilon) \, \|\nabla u\|_{2,G''}^2 + \varepsilon \big\| (\Delta_k^h \nabla u)\eta \big\|_2^2 ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|\, I_{1,4} \,| &\leq 2 \sum_{i,j} \|\nabla a_{ij}\|_{\infty,G'''} \int_G |\, \partial_i u \,|\,|\, \Delta_k^h u \,|\; \eta \, dx \; \|\nabla \eta\|_\infty \\
&\leq c \, \|\nabla u\|_{2,G''}^2 + \big\| \Delta_k^h u \big\|_{2,G''}^2 \\
&\leq c \, \|\nabla u\|_{2,G''}^2 .
\end{aligned}$$

Wenn wir nun ε klein genug wählen erhalten wir

$$I_1 \geq \frac{c_0}{2} \big\| (\Delta_k^h \nabla u)\eta \big\|_2^2 - c \, \|\nabla u\|_{2,G'''}^2 . \tag{6.17}$$

Die Terme der rechten Seite $\tilde{F}(\varphi)$ werden wie folgt abgeschätzt:

$$\begin{aligned}
|\, -\int_G f \, \Delta_k^{-h}(\eta^2 \Delta_k^h u) \, dx \,| &\leq \|f\|_2 \big\| \Delta_k^{-h}(\underbrace{\eta^2 \Delta_k^h u}_{\in H^1(G'')}) \big\|_2 \\
&\overset{\text{Lemma 6.3}}{\leq} \|f\|_2 \, \big\| \nabla(\eta^2 \Delta_k^h u) \big\|_2 \\
&= \|f\|_2 \, \big\| 2\eta \, \nabla\eta \, \Delta_k^h u + \eta^2 \Delta_k^h \nabla u \big\|_2 \\
&\overset{\text{Lemma 6.3}}{\leq} \|f\|_2 \big(c(\nabla\eta) \, \|\nabla u\|_{2,G'''} + \big\| (\Delta_k^h \nabla u)\eta \big\|_2 \big)
\end{aligned}$$

$$\leq \varepsilon \left\|(\Delta_k^h \nabla u)\eta\right\|_2^2 + c(\varepsilon)\, \|f\|_2^2 + c(\nabla\eta)\, \|\nabla u\|_{2.G'''}^2 \ ,$$

$$\begin{aligned}\Big|\int_G \sum_i b_i\, \partial_i u\, \Delta_k^{-h}(\eta^2 \Delta_k^h\, u)\, dx\Big| &\leq \|b\|_\infty\ \|\nabla u\|_{2,G'''}\, \left\|\Delta_k^{-h}(\eta^2 \Delta_k^h u)\right\|_2 \\ &\leq \varepsilon \left\|(\Delta_k^h \nabla u)\eta\right\|_2^2 + c(\varepsilon, b, \nabla\eta)\ \|\nabla u\|_{2,G'''}^2 \ ,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Big| - \int_G \sum_i H_i\, \partial_i(\Delta_k^{-h}(\eta^2\, \Delta_k^h u))\, dx\Big| &= \Big|\int_G \sum_i \partial_i H_i\ \Delta_k^{-h}(\eta^2\, \Delta_k^h u)\, dx\Big| \\ &\leq \|\mathrm{div}\, H\|_2\, \left\|\Delta_k^{-h}(\eta^2\, \Delta_k^h u)\right\|_2 \\ &\leq \varepsilon \left\|(\Delta_k^h \nabla u)\eta\right\|_2^2 + c(\varepsilon)\, \|\mathrm{div}\, H\|_2^2 + c(\nabla\eta)\, \|\nabla u\|_{2,G'''}^2 \ ,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Big| - \int_G \sum_i a_i\, u\, \partial_i(\Delta_k^{-h}(\eta^2 \Delta_k^h\, u))\, dx\Big| &= \Big|\int_G \sum_i (\partial_i a_i\, u + a_i\, \partial_i u)\Delta_k^{-h}(\eta^2\, \Delta_k^h u)\, dx\Big| \\ &\leq \|\mathrm{div}\, a\|_{H^{1,\infty}(G''')}\, (\|u\|_{2,G'''} + \|\nabla u\|_{2,G'''})\, \left\|\Delta_k^{-h}(\eta^2 \Delta_k^h u)\right\|_2 \\ &\leq c(a,\, \nabla a,\, \varepsilon)(\|u\|_{2,G'''}^2 + \|\nabla u\|_{2,G'''}^2) + \varepsilon \left\|(\Delta_k^h \nabla u)\, \eta\right\|_2^2 \ ,\end{aligned}$$

$$\Big|\int c\, u\, \Delta_k^{-h}(\eta^2 \Delta_k^h\, u)\, dx\Big| \leq c(c,\, \varepsilon)(\|u\|_{2,G'''}^2 + \|\nabla u\|_{2,G'''}^2) + \varepsilon \left\|(\Delta_k^h \nabla u)\, \eta\right\|_2^2 \ .$$

Wenn wir ε klein genug wählen, erhalten wir

$$\frac{c_0}{4} \left\|\Delta_k^h \nabla u\right\|_{2,G'}^2 \leq \frac{c_0}{4} \left\|(\Delta_k^h \nabla u)\eta\right\|_{2,G}^2 \leq c \Big(\|u\|_{H^1(G''')} + \|f\|_2 + \|\mathrm{div}\, H\|_2\Big) \ ,$$

wobei c von $\varepsilon^{-1}, \|\nabla\eta\|_\infty, \|a_i\|_{C^1(\overline{G}''')}, \|a_{ij}\|_{C^1(\overline{G}''')}, \|c\|_\infty, \|b_i\|_\infty$ abhängt. Aus Lemma 6.3 (b) folgt sofort

$$\left\|\nabla^2 u\right\|_{2,G'} \leq c \Big(\|u\|_{H^1(G''')} + \|f\|_{L^2(G)} + \|\mathrm{div}\, H\|_{L^2(G)}\Big) \ .$$

Wenn man auf beiden Seiten $\|u\|_{H^1(G')}$ dazu addiert, erhält man

$$\|u\|_{H^2(G')} \leq c \Big(\|u\|_{H^1(G''')} + \|f\|_{L^2(G)} + \|\mathrm{div}\, H\|_{L^2(G)}\Big) \ , \tag{6.18}$$

woraus (6.14) folgt.

Wir wollen nun die Abschätzung (6.15) beweisen. Wir können nicht wie bei der apriori Abschätzungen aus Existenzsatz vorgehen, d.h. mit u testen, da u nicht in $\mathring{H}^1(G)$ liegt, also keine erlaubte Testfunktion ist. Deshalb müssen wir wieder lokalisieren. Dazu wählen wir eine neue Abschneidefunktion $\tau \in C_0^\infty(G)$, mit $0 \le \tau \le 1$, und $\tau = 1$ auf G'''. Wähle nun $\varphi = u\tau^2$ in der schwachen Formulierung (6.13). Die Terme mit Ableitungen auf der Testfunktion werden mit Hilfe der Produktregel $\partial_j(u\,\tau^2) = \partial_j u\,\tau^2 + 2\tau\,\partial_j\tau\,u$ wie folgt behandelt:

$$\begin{aligned}
\int_G \sum_{i,j} a_{ij}\,\partial_i u\,\partial_j(\tau^2 u)\,dx &= \int_G \sum_{i,j} a_{ij}\,\partial_i u\,\big(\partial_j u\,\tau^2 + 2\tau\,\partial_j\tau\,u\big)\;dx,\\
\int_G \sum_i a_i\,u\,\partial_i(\tau^2 u)\,dx &= \int_G \sum_i a_i u\,\big(\partial_i u\,\tau^2 + 2\tau\partial_i\tau\,u\big)\;dx,\\
\int_G \sum_i H_i\,\partial_i(u\,\tau^2)\,dx &= \int_G \sum_i\, H_i(\partial_i u\,\tau^2 + 2\,\tau\,\partial_i\tau\,u)\,dx.
\end{aligned}$$

In (2.2) wählen wir $\xi_i = \partial_i u, \xi_0 = u$ und erhalten

$$\begin{aligned}
c_0 \int_G |\nabla u|^2\tau^2\,dx \le{}& \Big|\int_G \sum_{i,j} a_{ij}\,\partial_i u\,u\,2\tau\,\partial_j\tau\,dx\Big| + \Big|\int_G \sum_i a_i|u|^2\,2\tau\,\partial_i\tau\,dx\Big|\\
&+ \Big|\int_G f\,u\,\tau^2\,dx\Big| + \Big|\int_G \sum_i H_i\,\partial_i u\,\tau^2\,dx\Big| + \Big|\int_G 2H_i\tau\,\partial_i\tau\,u\,dx\Big|\\
&=: J_1 + \ldots + J_5\,.
\end{aligned}$$

Die Terme J_i, $i = 1,\ldots,5$ werden wie folgt abgeschätzt:

$$\begin{aligned}
|\,J_1\,| &\le 2\sum_{i,j} \|a_{ij}\|_{\infty,\operatorname{supp}\tau}\,\|u\,\nabla\tau\|_2\,\|\nabla u\,\tau\|_2 \le \varepsilon\,\|\nabla u\,\tau\|_2^2 + c(\varepsilon, a_{ij}\,\nabla\tau)\;\|u\|_{2,G}^2\,,\\
|\,J_2\,| &\le 2\sum_i \|a_i\|_{\infty,\operatorname{supp}\tau}\;\|\nabla\tau\|_\infty\;\|u\|_{2,G}^2\,,\\
|\,J_3\,| &\le \|f\|_2^2 + \|u\|_{2,G}^2\,,\\
|\,J_4\,| &\le c(\varepsilon)\sum_i \|H_i\|_2^2 + \varepsilon\,\|\nabla u\,\tau\|_2^2\,,\\
|\,J_5\,| &\le \sum_i \|H_i\|_2^2 + \|u\|_{2,G}^2\,.
\end{aligned}$$

Somit erhalten wir für ε klein genug

$$\|\nabla u\|_{2,G'''}^2 \le c\Big(\,\|f\|_2^2 + \sum_i \|H_i\|_2^2 + \|u\|_2^2\Big)\,,$$

woraus durch Addition von $\|u\|_{2,G'''}$ auf beiden Seiten

$$\|u\|^2_{H^1(G''')} \le c\Big(\|f\|_2^2 + \sum_i \|H_i\|_2^2 + \|u\|_2^2 \Big) ,$$

folgt. Dies eingesetzt in (6.18) ergibt

$$\|u\|_{H^2(G')} \le c\Big(\|f\|_2 + \|\mathrm{div}\, H\|_2 + \sum_i \|H_i\|_2 + \|u\|_2 \Big),$$

d.h. (6.15). ∎

6.19 Satz (globale H^2-Regularität). *Sei*

$$\begin{aligned} a_{ij},\, a_i &\in C^1(\overline{G}),\\ b_i,\, c &\in L^\infty(G),\\ H_i,\, \mathrm{div}\, H,\, f &\in L^2(G), \end{aligned}$$

und seien a_{ij} elliptisch, d.h. für alle $x \in G$ gilt

$$\sum_{i,j}^n a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \ge c_0|\xi|^2. \tag{6.20}$$

Ferner sei $u \in \overset{\circ}{H}{}^1(G)$ eine schwache Lösung von Problem (0.1), (0.2) und $\partial G \in C^2$. Dann gilt $u \in H^2(G)$ und die Abschätzung

$$\|u\|_{H^2(G)} \le c\,\big(\|f\|_2 + \|\mathrm{div}\ H\|_2 + \|u\|_{H^1(G)} \big) . \tag{6.21}$$

Falls die Koeffizienten zusätzlich die Bedingung (2.2) erfüllen, dann gilt

$$\|u\|_{H^2(G)} \le c\,\big(\|f\|_2 + \|\mathrm{div}\ H\|_2 + \sum_i \|H_i\|_2 \big), \tag{6.22}$$

wobei c nur von den Normen von a_{ij}, a_i, b_i, c und von ∂G abhängt.

Beweis : (i) Wir betrachten zuerst ein Modellproblem, dass der speziellen Situation entspricht, dass der Rand flach nahe $x_0 \in \partial G$ ist. Wir bezeichnen $\mathbb{R}^n_+ := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n \ge 0\}$ und definieren ein neues Gebiet G durch

$$G := B_1(0) \cap \mathbb{R}^n_+ .$$

Weiterhin setzen wir $G' := B_{\frac12}(0) \cap \mathbb{R}^n_+$ und wählen eine Abschneidefunktion $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $0 \le \eta \le 1$, $\eta = 1$ auf $B_{\frac12}(0)$ und $\mathrm{supp}\, \eta \subset B_1(0)$. Wir benutzen wieder die Bezeichnung $x = (x',\, x_n)$. Sei $u \in H^1(G)$ mit $u(x',0) = 0$ eine schwache Lösung, d.h.

$$B(u,\varphi) = F(\varphi) \qquad \forall \varphi \in \mathring{H}^1(G)\,.$$

Wir gehen ähnlich wie im Beweis von Satz 6.11 vor. Dazu bezeichnen wir wieder

$$\tilde{F}(\varphi) := F(\varphi) - \int\limits_G \sum_i a_i\, u\, \partial_i \varphi + \sum_i b_i\, \partial_i u\, \varphi + c\, u\, \varphi\, dx\,.$$

und erhalten

$$I_1 := \int\limits_G \sum_{i,j} a_{ij}\, \partial_i u\, \partial_j \varphi = \tilde{F}(\varphi) \quad \forall \varphi \in \mathring{H}^1(G)\,.$$

Auf Grund der speziellen Geometrie von G hat die Richtung e_n eine Sonderrolle. Deshalb betrachten wir zuerst die anderen Richtungen. Für $h > 0$ klein genug und $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ wählen wir als Testfunktion

$$\varphi = -\Delta_k^{-h}(\eta^2 \Delta_k^h u)\,.$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}
\varphi &= -\frac{1}{h}\Delta_k^{-h}\left(\eta^2(x)\,(u(x+he_k) - u(x))\right) \\
&= -\frac{1}{h^2}\left(\eta^2(x-he_k)\big(u(x) - u(x-he_k)\big) - \eta^2(x)\big(u(x+he_k) - u(x)\big)\right)\,.
\end{aligned}$$

Da $\eta(x) = 0$ für $x \in \partial B_1(0)$, und $u(x) = 0$ für $x = (x',0)$ erhalten wir, dass $\varphi(x) = 0$ auf dem gesamten Rand ∂G. Somit ist φ eine zulässige Testfunktion. Wie im Beweis von Satz 6.11 können wir die linke Seite I_1 abschätzen und erhalten (vgl. (6.17))

$$I_1 \geq \frac{c_0}{2} \int\limits_G \eta^2 |\Delta_k^h \nabla u|^2 dx - c \int\limits_G |\nabla u|^2 dx\,.$$

Auch die rechte Seite $\tilde{F}$ wird genauso behandelt. Wir erhalten insgesamt für $k = 1, \ldots, n-1$

$$\frac{c_0}{4} \int\limits_{G'} |\Delta_k^h \nabla u|^2\, dx \leq \frac{c_0}{4} \int\limits_G |\Delta_k^h \nabla u|^2 \eta^2\, dx$$

$$\leq c \int_G |f|^2 + |\operatorname{div} H|^2 + |u|^2 + |\nabla u|^2 \, dx\,.$$

Mit Lemma 6.3 (b) folgt dann wieder $\partial_k \nabla u \in L^2(G')$, $k = 1, \dots, n-1$, und somit

$$\sum_{\substack{i,j=1 \\ i+j<2n}}^{n} \|\partial_i \partial_j u\|_{L^2(G')} \leq c \left(\|f\|_{L^2(G)} + \|\operatorname{div} H\|_{L^2(G)} + \|u\|_{H^1(G)} \right) .$$

Es fehlt die Abschätzung von $\partial_n \partial_n u$. Ein analoges Vorgehen geht nicht, da $\varphi = -\Delta_n^{-h}(\eta^2 \Delta_n^h u)$ in den Punkten $(x', 0)$ nicht Null ist. Wir wollen $\partial_n \partial_n u$ direkt aus der Gleichung ausrechnen. In der Bemerkung nach Satz 6.11 wurde gezeigt, dass (0.1) f.ü. in G gilt, d.h.

$$-\sum_{i,j} \partial_j (a_{ij}\, \partial_i u) - \sum_i \partial_i (a_i\, u) + \sum_i b_i\, \partial_i u + c\, u = f - \sum_i \partial_i H_i\,.$$

Für den ersten Term auf der linken Seite gilt:

$$-\sum_{i,j} \partial_j (a_{ij}\, \partial_i u) = -\sum_{i,j} a_{ij}\, \partial_j \partial_i u + (\partial_j a_{ij})\, \partial_i u\,.$$

Die letzten Summanden haben dieselbe Struktur wie die Terme mit b_i. Deshalb setzen wir $\tilde{b}_i = b_i - \sum_j \partial_j a_{ij}$. Wenn wir nun noch der Term mit $\partial_n \partial_n u$ separieren, erhalten wir

$$a_{nn}\, \partial_n \partial_n u = -\sum_{\substack{i,j \\ i+j<2n}} a_{ij}\, \partial_j \partial_i u - \sum_i \partial_i (a_i\, u) + \sum_i \tilde{b}_i\, \partial_i u + c\, u - f + \operatorname{div} H\,.$$

Die Elliptizitätsbedingung für $\xi = e_n$ ist gerade $a_{nn}(x) \geq c_0$. Auf Grund der Voraussetzungen an a_{ij}, a_i, b_i, c erhalten wir

$$|\partial_n^2 u| \leq c \sum_{\substack{i,j=1 \\ i+j<2n}}^{n} |\partial_i \partial_j u| + |\nabla u| + |f| + |u| + |\operatorname{div} H|$$

und somit

$$\left\|\nabla^2 u\right\|_{L^2(G')} \leq c \left(\|f\|_{L^2(G)} + \|\operatorname{div} H\|_{L^2(G)} + \|u\|_{H^1(G)} \right) ,$$

woraus sofort

$$\|u\|_{H^2(G')} \leq c \left(\|f\|_{L^2(G)} + \|\operatorname{div} H\|_{L^2(G)} + \|u\|_{H^1(G)} \right) \tag{6.23}$$

folgt.
(ii) nicht flacher Fall: Für $x_0 \in \partial G \in C^2$ existiert ein $r > 0$ und eine Funktion $\gamma \in C^2$, so dass $G \cap B(x_0) = \{x \in B_r(x_0),\, x_n > \gamma(x')\}$. Wie im Beweis von Satz 1.10.14 plätten wir den Rand mit Hilfe der Abbildung $y = \Phi(x)$ (vgl. Gleichung (10.17) in Kapitel 1). Sei $x = \Psi(y)$ die Inverse und sei $s > 0$ klein genug, so dass $B_s(y_0) \subseteq \Phi(B_r(x_0))$. Wir setzen

$$\tilde{G} := B_s(y_0) \cap \{y_n > 0\} \qquad\qquad \tilde{G}' := B_{s/2}(y_0) \cap \{y_n > 0\}\,.$$

Für Funktionen g definiert in G setzen wir $g'(y) := g(\Psi(y))$ für $y \in \tilde{G}$. Für die Lösung $u \in \mathring{H}^1(G)$ unseres Problems erhalten wir, dass $u' \in H^1(\tilde{G})$ und $u'(y', 0) = 0$ für alle $(y', 0) \in \tilde{G}$. Weiterhin ist u' eine schwache Lösung vom

$$B'(u', \varphi') = F'(\varphi') \quad \forall \varphi' \in \mathring{H}^1(\tilde{G})\,,$$

wobei

$$B'(u', \varphi') = \int\limits_{\tilde{G}} \sum_{k,l} \tilde{a}'_{kl} \partial_k u' \partial_l \varphi' + \sum_k \tilde{a}'_k u' \partial_k \varphi' + \sum_k \tilde{b}'_k \partial_k u' \varphi' + \tilde{c}' u' \varphi' \, dy\,,$$
$$F'(\varphi') = \int\limits_{\tilde{G}} f' \varphi' \, dy + \int\limits_{\tilde{G}} \sum_k \tilde{H}'_k \, \partial_k \, \varphi' \, dy\,.$$

Die neuen Koeffizienten $\tilde{a}'_{kl}, \tilde{a}'_k, \tilde{b}'_k, \tilde{c}'$ kann man mit Hilfe des Transformationssatzes wie folgt berechnen (man beachte $x = \Psi(y), U = \Psi(\tilde{G})$ und $\det \nabla\Psi = \det \nabla\Phi = 1$)

$$\begin{aligned}
&\int\limits_U \sum_{i,j} a_{ij}(x) \partial_i u(x) \partial_j \varphi(x) \, dx \\
&= \int\limits_{\tilde{G}} \sum_{i,j} a_{ij}(\Psi(y)) \partial_{x_i} u(\Psi(y)) \partial_{x_j} \varphi(\Psi(y)) \, dy \\
&= \int\limits_{\tilde{G}} \sum_{k,l} \underbrace{\Big(\sum_{i,j} a'_{ij}(y) \partial_{x_i} \Phi_k(\Psi(y)) \partial_{x_j} \Phi_l(\Psi(y)) \Big)}_{=: \tilde{a}'_{kl}(y)} \partial_{y_k} u'(y) \, \partial_{y_l} \varphi'(y) \, dy\,,
\end{aligned}$$

wobei wir

$$\partial_{x_i} u(\Psi(y)) = \partial_{x_i} u'(\Phi(x)) = \sum_k \partial_{y_k} u'(y) \partial_{x_i} \Phi_k(\Psi(y))$$

benutzt haben. Analoge Rechnungen liefern:

$$\tilde{a}'_k(y) := \sum_i a'_i(y) \partial_{x_i} \Phi_k(\Psi(y)), \qquad\qquad \tilde{b}'_k := \sum_i b'_i(y) \partial_{x_i} \Phi_k(\Psi(y)),$$

$$\tilde{c}'(y) := c(y), \qquad\qquad \tilde{H}'_k(y) := \sum_i G'_i(y)\partial_{x_i}\Phi_k(\Psi(y)).$$

Aus den Voraussetzungen an die Koeffizienten und den Rand folgt, dass

$$\tilde{a}'_k,\, \tilde{a}'_{kl} \in C^1, \quad \tilde{b}'_k,\, \tilde{c}' \in L^\infty, \quad \tilde{H}'_k,\, \operatorname{div}\tilde{H}' \in L^2\,.$$

Also ist $B'(\cdot,\cdot)$ beschränkt und bilinear, sowie $F' \in L^2$. Die Koeffizienten $\tilde{a}'_{k,l}$ sind auch elliptisch, denn

$$\sum_{k,l} \tilde{a}'_{kl}\xi_k\xi_l = \sum_{i,j,k,l} a'_{ij}\, \partial_{x_i}\Phi_k \partial_{x_j}\Phi_l\, \xi_k\xi_l\,.$$

Wenn man nun $\eta_i := \sum_k \partial_{x_i}\Phi_k\, \xi_k$, $i = 1,\dots,n$, setzt, kann man (6.20) benutzen und erhält

$$= \sum_{i,j} a'_{ij}\, \eta_i\, \eta_j \geq c_0 \sum_i \eta_i^2\,.$$

Da $\nabla\Psi$ invertierbar ist und $\eta = (\nabla\Phi)\xi$ erhält man $\xi = (\nabla\Psi)\eta$, d.h. $\xi_i := \sum_k \partial_{x_i}\Psi_k\, \eta_k$, $i = 1,\dots,n$, und somit $|\xi| \leq c\,|\eta|$. Also gilt:

$$\sum_{k,l} \tilde{a}'_{k,l}\xi_k\xi_l \geq \tilde{c}_0 \sum_i \xi_i^2\,.$$

Auf Grund der Ergebnisse in (i) folgt somit

$$\|u'\|_{H^2(\tilde{G}')} \leq c\Big(\|f'\|_{L^2(\tilde{G})} + \|\operatorname{div}\tilde{H}'\|_{L^2(\tilde{G})} + \|u'\|_{H^1(\tilde{G})} \Big).$$

Der Tranformationssatz (siehe Beweis Satz 1.10.14) liefert dann

$$\|u\|_{H^2(U')} \leq c\Big(\|f\|_{L^2(U)} + \|\operatorname{div} H\|_{L^2(U)} + \|u\|_{H^1(U)} \Big),$$

wobei

$$U := \Psi(\tilde{G}), \qquad U' := \Psi(\tilde{G}').$$

(iii) Da ∂G kompakt ist, kann man wie in Abschnitt 1.10, mit Hilfe einer Überdeckung des Randes ∂G mit endlich vielen Mengen U aus (ii) und der Abschätzung für die innere Regularität in (i), argumentieren und erhält die Behauptung (6.21).

(iv) Falls die Koeffizienten Bedingung (2.2) erfüllen, liefert der Existenzsatz 2.4 die Abschätzung (mit Randwerten $g = 0$)

$$\|u\|_{H^1(G)} \le c_2 \left(\|f\|_{L^2(G)} + \sum_{i=1}^{n} \|H_i\|_{L^2(G)}\right).$$

Dies und (6.21) liefern (6.22). ■

6.24 Satz (lokale höhere Regularität). *Sei $m \in \mathbb{N}_0$ und sei*

$$a_{ij},\, a_i \in C^{m+1}(G)$$
$$b_i,\, c \in C^m(G)$$
$$H_i,\, f,\, \operatorname{div} H \in H^m(G)$$

und erfüllen die Koeffizienten die Bedingung (2.2). Ferner sei $u \in H^1(G)$ eine schwache Lösung vom Problem (0.1), d.h. für alle $\varphi \in \mathring{H}^1(G)$ gilt

$$B(u,\varphi) = F(\varphi). \tag{6.25}$$

Dann gilt

$$u \in H^{m+2}_{\mathrm{loc}}(G)$$

und für alle $G' \subseteq\subseteq G$ gilt die Abschätzung

$$\|u\|_{H^{m+2}(G')} \le c\Big(\|f\|_{H^m(G)} + \|\operatorname{div} H\|_{H^m(G)} + \sum_i \|H_i\|_{H^m(G)} + \|u\|_{L^2(G)}\Big),$$

wobei c nur von m, G, G'' und den Koeffizienten a_{ij}, a_i, b_i, c abhängt.

Beweis : Der Satz wird mit Induktion bewiesen. Für $m = 0$ ist die Behauptung gerade Satz 6.11. Sei die Behauptung des Satzes für $m \ge 0$ wahr und sei

$$a_{ij},\, a_i \in C^{m+2}(G), \qquad b_i,\, c \in C^{m+1}(G), \qquad H_i,\, f,\, \operatorname{div} H \in H^{m+1}(G)\,.$$

Ferner sei u eine schwache Lösung von (0.1) so dass $u \in H^{m+2}_{\mathrm{loc}}(G)$ die Abschätzung

$$\|u\|_{H^{m+2}(G'')} \le c\Big(\|f\|_{H^m(G)} + \|\operatorname{div} H\|_{H^m(G)} + \sum_i \|H_i\|_{H^m(G)} + \|u\|_{L^2(G)}\Big),$$

erfüllt, wobei $G' \subseteq\subseteq G'' \subseteq\subseteq G$. Die Idee ist nun (0.1) $|\alpha| = m + 1$-mal durch zu differenzieren, sowie $\tilde{u} := D^\alpha u$ als Lösung eines neuen Systems mit ähnlicher Struktur zu betrachten. Dazu wählen wir für beliebiges $\tilde{v} \in C_0^\infty(G'')$

als Testfunktion in (6.25) $\varphi = (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \tilde{v}$. Mit Hilfe partieller Integration erhalten wir für $\tilde{u} := D^\alpha u \in H^1(G'')$ die Gleichung

$$B(\tilde{u},\, \tilde{v}) = \tilde{F}(\tilde{v})\,.$$

Mit Hilfe der Produktregel erhalten wir

$$\begin{aligned}
(-1)^{|\alpha|} \int\limits_G \sum_{i,j} a_{ij}\, \partial_i u\, \partial_j D^\alpha \tilde{v}\, dx &= \int\limits_G \sum_{i,j} D^\alpha (a_{ij}\, \partial_i u)\, \partial_j \tilde{v}\, dx \\
= \int\limits_G \sum_{i,j} a_{ij}\, \partial_i D^\alpha u\, \partial_j \tilde{v} &+ \sum_{i,j} \sum_{\substack{\beta \le \alpha \\ \beta \ne \alpha}} D^{\alpha-\beta} a_{ij}\, \partial_i D^\beta u\, \partial_j \tilde{v}\, dx \\
= \int\limits_G \sum_{i,j} a_{ij}\, \partial_i \tilde{u}\, \partial_j \tilde{v} &- \int\limits_G \sum_{i,j} \sum_{\substack{\beta \le \alpha \\ \beta \ne \alpha}} \partial_j (D^{\alpha-\beta} a_{ij}\, \partial_i D^\beta u)\, \tilde{v}\, dx,
\end{aligned}$$

wobei wir den letzten Term auf die rechte Seite bringen werden. Die Summation über β wird für alle β mit $\beta_j \le \alpha_j$, $j = 1, \ldots, n$ ausgeführt, wobei es ein i gibt, so dass $\alpha_i > \beta_i$. Die anderen Terme werden analog behandelt. Mit der Notation

$$\begin{aligned}
\tilde{F}(\tilde{v}) := \int\limits_G \; & D^\alpha f \tilde{v} - \sum_i \partial_i D^\alpha H_i \tilde{v} + \sum_{i,j} \sum_{\substack{\beta \le \alpha \\ \beta \ne \alpha}} \partial_j (D^{\alpha-\beta} a_{ij}\, \partial_i D^\beta u)\, \tilde{v} \\
& + \sum_i \sum_{\substack{\beta \le \alpha \\ \beta \ne \alpha}} \partial_i (D^{\alpha-\beta} a_i\, D^\beta\, u) \tilde{v} - \sum_i \sum_{\substack{\beta \le \alpha \\ \beta \ne \alpha}} D^{\alpha-\beta} b_i\, \partial_i D^\beta u\, \tilde{v} \\
& - \sum_{\substack{\beta \le \alpha \\ \beta \ne \alpha}} D^{\alpha-\beta} c\, D^\beta u \tilde{v}\, dx \\
=: \int\limits_G \; & \tilde{f}\, \tilde{v}\, dx
\end{aligned}$$

folgt, dass für alle $\tilde{v} \in C_0^\infty(G'')$ gilt

$$B(\tilde{u},\, \tilde{v}) = \tilde{F}(\tilde{v})$$

d.h. $\tilde{u} \in H^1(G'')$ ist schwache Lösung in G''. Man beachte, dass $\tilde{f} \in L^2(G'')$, da auf Grund der Voraussetzungen gilt: $\partial_i D^\alpha H_i = D^\alpha \mathrm{div}\, G \in L^2$, $D^\alpha f \in L^2$, sowie

$$\partial_j (D^{\alpha-\beta} a_{ij}\, \partial_i D^\beta u) = \underbrace{D^{\alpha-\beta} \partial_j\, a_{ij}}_{\substack{m+1+1 \\ \in C^0}}\; \underbrace{\partial_i D^\beta}_{\substack{1+m \\ \text{da } \beta < \alpha \\ \in H^1}}\, u + \underbrace{\partial_j \partial_i D^\beta}_{\substack{2+m \\ \in L^2}}\, u\; \underbrace{D^{\alpha-\beta}}_{\substack{m+1 \\ \in C^1}} a_{ij}$$

Die Terme mit a_i, b_i und c werden analog behandelt. Wir erhalten

$$\begin{aligned}\|\tilde{f}\|_{L^2(G'')} &\leq c\left(\|f\|_{H^{m+1}(G)} + \|\operatorname{div} H\|_{H^{m+1}(G)} + \|u\|_{H^{m+2}(G'')}\right)\\ &\overset{IVor.}{\leq} c\Big(\|f\|_{H^{m+1}(G)} + \|\operatorname{div} H\|_{H^{m+1}(G)} + \sum_i \|H_i\|_{H^m} + \|u\|_{L^2(G)}\Big).\end{aligned}$$

Satz 6.11 liefert dann

$$\begin{aligned}\|\tilde{u}\|_{H^2(G')} &\leq c\left(\|\tilde{f}\|_{L^2(G'')} + \|u\|_{L^2(G)}\right)\\ &\leq c\Big(\|f\|_{H^{m+1}(G)} + \|\operatorname{div} H\|_{H^{m+1}(G)} + \sum_i \|H_i\|_{H^m(G)} + \|u\|_{L^2(G)}\Big).\end{aligned}$$

Da $\tilde{u} = D^\alpha u$ für alle $|\alpha| = m+1$, erhalten wir

$$\|u\|_{H^{m+3}(G')} \leq c\Big(\|f\|_{H^{m+1}(G)} + \|\operatorname{div} H\|_{H^{m+1}(G)} + \sum_i \|H_i\|_{H^m(G)} + \|u\|_{L^2(G)}\Big).$$

Somit ist der Satz bewiesen. ■

6.26 Satz (lokale unendliche Differenzierbarkeit). *Falls*

$$a_{ij},\, a_i,\, b_i,\, c,\, f, H_i \in C^\infty(G)$$

und $u \in H^1(G)$ eine schwache Lösung von (0.1) ist, wobei die Koeffizienten (2.2) erfüllen, dann gilt

$$u \in C^\infty(G).$$

Beweis : Satz 6.24 liefert für alle $m \in \mathbb{N}$ dass $u \in H^m_{\text{loc}}(G)$. Aus den Einbettungssätzen folgt dann $u \in C^k(\overline{G'})$ für alle k und alle $G' \subseteq\subseteq G$, d.h. $u \in C^\infty(G)$. ■

6.27 Satz (höhere globale Regulatriät). *Sei $m \in \mathbb{N}_0$ und sei*

$$\begin{gathered}a_{ij},\, a_i \in C^{m+1}(\overline{G})\\ b_i,\, c \in C^m(\overline{G})\end{gathered}$$

sowie

$$f,\, H_i,\, \operatorname{div} H \in H^{m,2}(G).$$

Falls die Koeffizienten die Bedingung (2.2) erfüllen, der Rand $\partial G \in C^{m+2}$ erfüllt und $u \in \mathring{H}^{1,2}(G)$ eine schwache Lösung von (0.1), (0.2) mit $g = 0$ ist, d.h.

$$B(u,\varphi) = F(\varphi) \quad \forall \varphi \in \mathring{H}^1(G),$$

dann gilt

$$u \in H^{m+2}(G)$$

und es gilt die Abschätzung

$$\|u\|_{H^{m+2}(G)} \leq c\Big(\|f\|_{H^m(G)} + \sum_i \|H_i\|_{H^m(G)} + \|\operatorname{div} H\|_{H^m(G)} \Big) .$$

Beweis : Der Beweis läuft wie der Beweis von Satz 6.11 (Induktion) und Satz 6.19 ($\partial_n \partial^\alpha u$ aus Gleichung ausrechnen, $|\alpha| = m+1$). Mehr Details kann man in Evans Seite 323 ff. finden. ■