Aufgabe 1 (Eine schwach aber nicht stark konvergente Folge) (5 Punkte)

Sei $p \in [1, \infty)$ und die Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq W^{1,p}(0,1)$ definiert durch

$$u_n(x) := \begin{cases} x & \text{falls } x \in \left(0, \frac{1}{n}\right) \\ \frac{2}{n} - x & \text{falls } x \in \left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right) \end{cases}.$$

für alle $x \in \left(0, \frac{2}{n}\right)$ und periodisch erweitert auf ganz $(0,1)$. Zeigen Sie, dass $u_n \rightharpoonup 0$ in $W^{1,p}(0,1)$ $(n \to \infty)$ und $u_n \not\to 0$ in $W^{1,p}(0,1)$ $(n \to \infty)$ gilt. Begründen Sie insbesondere warum $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq W^{1,p}(0,1)$ gilt.

Aufgabe 2 (Schwache Unterhalbstetigkeit $\Rightarrow$ Unterhalbstetigkeit) (1 Punkte)

Sei X ein Banach–Raum und $f : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ schwach unterhalbstetig. Zeigen Sie, dass $f : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ unterhalbstetig ist, d.h. für eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ folgt aus $x_n \to x$ in X $(n \to \infty)$, dass $f(x) \le \liminf_{n\to\infty} f(x_n)$.

Aufgabe 3 (Konvexität + Unterhalbstetigkeit $\Rightarrow$ Schw. Unterhalbstetigkeit) (5 Punkte)

Sei X ein Banach–Raum und $f : C \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ unterhalbstetig und konvex, d.h. für alle $x, y \in C$ und $\lambda \in [0,1]$ gilt $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \le \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$. Zeigen Sie, dass $f : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ schwach unterhalbstetig ist.

Aufgabe 4 (Direkte Methode für konvexe Funktionen) (4 Punkte)

Sei X ein reflexiver Banach–Raum, $\emptyset \neq C \subseteq X$ abgeschlossen und konvex, und $f : C \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ unterhalbstetig, konvex und koerziv. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen gelten:

(i) Es existiert ein $x \in C$, sodass $f(x) = \inf_{y\in C} f(y)$.

(ii) Falls $f : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ zusätzlich strikt konvex ist, d.h. für alle $x, y \in C$ mit $x \neq y$ und $\lambda \in (0,1)$ gilt $f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$, dann existiert genau ein $x \in C$, sodass $f(x) = \inf_{y\in C} f(y)$.

Aufgabe 5 (Das Indikatorfunktional) (5 Punkte)

Sei X ein Banach–Raum und $C \subseteq X$. Das Indikatorfunktional $I_C : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ sei für alle $x \in X$ definiert durch

$$I_C(x) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x \in C \\ \infty & \text{falls } x \in X \setminus C \end{cases}.$$

Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen gelten:

(i) $I_C : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ist nicht-trivial, d.h. $I_C(x) < \infty$ für ein $x \in X$, gdw. $C \neq \emptyset$.

(ii) $I_C : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ist konvex gdw. C konvex ist.

(iii) $I_C : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ist unterhalbstetig gdw. C abgeschlossen ist.