Theorie und Numerik für nichtlineare PDEs, Blatt 10 — WS 2021

Prof. Dr. S. Bartels, Prof. Dr. M. Růžička, Dr. A. Kaltenbach — **Abgabetermin:** 10.01.22

Aufgabe 1 (Summenformel für Subdifferentiale) (5 Punkte)

Sei X ein Banach–Raum, $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ konvex und subdifferenzierbar in $x \in X$ und $g : X \to \mathbb{R}$ konvex und Gâtteaux–differenzierbar, sodass die Gâtteaux–Ableitung $Dg : X \to X^*$ in $x \in X$ stetig ist. Zeigen Sie, dass $h := f + g : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ in $x \in X$ subdifferenzierbar ist mit

$$(\partial h)(x) = (\partial f)(x) + \{(Dg)(x)\}.$$

Tipp: Zeigen Sie zunächst, dass $h : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ in $x \in X$ subdifferenzierbar ist mit $(\partial f)(x) + \{(Dg)(x)\} \subseteq (\partial h)(x)$. Zeigen Sie dann, dass $(\partial h)(x) - \{(Dg)(x)\} \subseteq (\partial f)(x)$.

Definition (Fenchel–Konjugierte)

Sei X ein Banach–Raum und $f : X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Dann heißt $f^* : X^* \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, für alle $x^* \in X^*$ definiert durch

$$f^*(x^*) := \sup_{y \in X} \langle x^*, y\rangle_X - f(y)$$

die Fenchel–Konjugierte von f.

Aufgabe 2 (Fenchel–Young–Ungleichung) (2 Punkte)

Sei X ein Banach–Raum und $f : X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Zeigen Sie, dass

$$\langle x^*, x\rangle_X \leq f^*(x^*) + f(x)$$

für alle $x \in X$ und $x^* \in X^*$ so, dass die rechte Seite wohldefiniert ist, d.h. der Fall $\infty - \infty$ nicht auftritt.

Aufgabe 3 (Fenchel–Young–Identität) (3 Punkte)

Sei X ein Banach–Raum und $f : X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Zeigen Sie, dass für $x \in X$ und $x^* \in X^*$

$$\langle x^*, x\rangle_X = f^*(x^*) + f(x)$$

genau dann gilt, wenn $x^* \in (\partial f)(x)$.

Aufgabe 4 (Explizite Lösung zum Hindernisproblem) (5 Punkte)

Bestimmen Sie die rotationssymmetrische Lösung des zweidimensionalen Hindernisproblems auf $\Omega = B_2^2(0) \subseteq \mathbb{R}^2$ für $f \equiv 2$, $u_{\mathrm{D}} \equiv \frac{3}{2} - \log(2)$ und $\chi \equiv 0$, d.h. ein $u \in W^{1,2}(\Omega)$, sodass $u \geq \chi$ f.ü. in Ω, $u = u_{\mathrm{D}}$ f.ü. auf $\partial\Omega$ und

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla(u - v)\, dx \leq \int_\Omega f(u - v)\, dx$$

für alle $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ mit $v \geq \chi$ f.ü. in Ω.

Aufgabe 5 (Stabilität des Hindernisproblems) (5 Punkte)

Wir betrachten das Hindernisproblem mit homogenen Dirichlet–Randdaten sowie Hindernis $\chi \in W^{1,2}(\Omega)$ mit $\chi \leq 0$ f.ü. auf $\partial\Omega$ und $f \in L^2(\Omega)$, wobei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, ein beschränktes Lipschitz–Gebiet ist.

Zeigen Sie, dass dieses Hindernisproblem stabil hinsichtlich kleiner Störungen von χ und f ist.

Zusatzaufgabe (5 Punkte)

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ definiert durch

$$f(s) = -as + I_+(s - b),$$

wobei $I_+(s) = 0$, falls $s \geq 0$, und $I_+(s) = +\infty$, falls $s < 0$. Bestimmen Sie die Fenchel–Konjugierte $f^* : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ zu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.