Theorie und Numerik für nichtlineare PDEs, Blatt 11

WS 2021

Prof. Dr. S. Bartels, Prof. Dr. M. Růžička, Dr. A. Kaltenbach **Abgabetermin:** 17.01.22

Aufgabe 1 (Komplementäre N-Funktion) (5 Punkte)

Sei $\varphi : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine reguläre N–Funktion. Dann ist die komplementäre Funktion $\varphi^* : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, für alle $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ definiert durch

$$\varphi^*(t) := \int_0^t (\varphi')^{-1}(s)\,ds,$$

ebenfalls eine reguläre N–Funktion.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Sei $p \in (1,\infty)$. Zeigen Sie, dass Konstanten $c, C > 0$ existieren, die nur von $p \in (1,\infty)$ abhängen, sodass für alle $\delta \geq 0$ und $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^d$ mit $\delta + |\boldsymbol{\xi}| + |\boldsymbol{\eta}| > 0$ gilt:

$$c(\delta + |\boldsymbol{\xi}| + |\boldsymbol{\eta}|)^{p-2} \leq \int_0^1 (\delta + |\boldsymbol{\xi} + \tau(\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\xi})|)^{p-2}\,d\tau \leq C(\delta + |\boldsymbol{\xi}| + |\boldsymbol{\eta}|)^{p-2}.$$

Tipp: Betrachten Sie die Funktion $L : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$L(\delta, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) := \int_0^1 \left(\frac{\delta + |\boldsymbol{\xi}| + |\boldsymbol{\eta}|}{\delta + |\boldsymbol{\eta} + \tau(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta})|} \right)^{2-p} d\tau$$

für alle $\delta \geq 0$ und $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^d$. Nutzen Sie, dass L auf $\mathbb{S} := \{(\delta, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})^\top \in \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \mid \delta^2 + |\boldsymbol{\xi}|^2 + |\boldsymbol{\eta}|^2 = 1\}$ stetig ist sowie das Skalierungsverhalten von L, d.h. für welches $\beta \geq 0$ gilt $L(\lambda\delta, \lambda\boldsymbol{\xi}, \lambda\boldsymbol{\eta}) = \lambda^\beta L(\delta, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})$ für alle $(\delta, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})^\top \in \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ und $\lambda > 0$?

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Sei $F : L^p(\Omega; \mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$, $p \in (1,\infty)$, für alle $u \in L^p(\Omega; \mathbb{R}^d)$ definiert durch

$$F(u) := \frac{1}{p} \|u\|^p_{L^p(\Omega;\mathbb{R}^d)}.$$

Zeigen Sie, dass die Fenchel–Konjugierte $F^* : L^{p'}(\Omega; \mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$ durch $F^*(v) = \frac{1}{p'}\|v\|^{p'}_{L^{p'}(\Omega;\mathbb{R}^d)}$ für alle $v \in L^{p'}(\Omega; \mathbb{R}^d)$ gegeben ist.

Aufgabe 4 (Schwache Dualität des p–Laplace–Problems) (5 Punkte)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, ein beschränktes Gebiet und $f \in L^{p'}(\Omega)$.

Zeigen Sie, für das p–Laplace–Problem, d.h. die Minimierung von $I : W^{1,p}_0(\Omega) \to \mathbb{R}$, definiert durch $I(v) = \frac{1}{p}\|\nabla v\|^p_{L^p(\Omega;\mathbb{R}^d)} - (f, v)_{L^p(\Omega)}$ für alle $v \in W^{1,p}_0(\Omega)$, dass bezüglich des Lagrange–Funktionals $L : W^{1,p}_0(\Omega) \times W^{p'}(\mathrm{div}; \Omega) \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, definiert durch

$$L(v, q) := (\nabla v, q)_{L^{p'}(\Omega;\mathbb{R}^d)} - \frac{1}{p'}\|q\|^{p'}_{L^{p'}(\Omega;\mathbb{R}^d)} - (f, v)_{L^{p'}(\Omega)}$$

für alle $(v, q)^\top \in W^{1,p}_0(\Omega) \times W^{p'}(\mathrm{div}; \Omega)$, schwache Dualität zum dualen p–Laplace–Problem, d.h. die Maximierung von $D : W^{p'}(\mathrm{div}; \Omega) \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, definiert durch $D(q) = -\frac{1}{p'}\|q\|^{p'}_{L^{p'}(\Omega;\mathbb{R}^d)} - I_{\{-f\}}(\mathrm{div}(q))$ für alle $q \in W^{p'}(\mathrm{div}; \Omega)$ gilt, d.h.

$$\inf_{v \in W^{1,p}_0(\Omega)} I(v) \geq \sup_{q \in W^{p'}(\mathrm{div};\Omega)} D(q).$$

Tipp: Verwenden Sie Aufgabe 3. Zeigen Sie weiter, dass

$$\inf_{v \in W^{1,p}_0(\Omega)} \sup_{q \in W^{p'}(\mathrm{div};\Omega)} L(v, q) \geq \sup_{q \in W^{p'}(\mathrm{div};\Omega)} \inf_{v \in W^{1,p}_0(\Omega)} L(v, q).$$