Aufgabe 1 (Norm–Konvergenz $\Leftrightarrow$ Modular–Konvergenz) (5 Punkte)

Sei $\varphi : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine reguläre N–Funktion mit $\varphi \in \Delta_2$ und $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, ein beschränktes Gebiet. Zeigen Sie, dass Norm–Konvergenz und Modular–Konvergenz äquivalent sind, d.h. für eine Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^\varphi(\Omega)$ und eine Funktion $u \in L^\varphi(\Omega)$ gilt $\|u_n - u\|_{L^\varphi(\Omega)} \to 0$ $(n \to \infty)$ genau dann, wenn $\rho_\varphi(u_n - u) \to 0$ $(n \to \infty)$.

Aufgabe 2 (Alternative Norm auf $L^\varphi(\Omega)$) (5 Punkte)

Sei $\varphi : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine reguläre N–Funktion und $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, ein beschränktes Gebiet. Zeigen Sie, dass $|||\cdot|||_\varphi : L^\varphi(\Omega) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, für alle $u \in L^\varphi(\Omega)$ definiert durch

$$|||u|||_\varphi := \sup_{\substack{v\in L^\varphi(\Omega)\\ \rho_\varphi(v)\leq 1}} \int_\Omega |uv|\,dx,$$

eine Norm ist.

Aufgabe 3 (Hölder'sche Ungleichung) (3 Punkte)

Sei $\varphi : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine reguläre N–Funktion, sodass $\varphi, \varphi^* \in \Delta_2$, und $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, ein beschränktes Gebiet. Zeigen Sie, dass für alle $u \in L^\varphi(\Omega)$ und $v \in L^{\varphi^*}(\Omega)$ gilt, dass $uv \in L^1(\Omega)$ und

$$\|uv\|_{L^1(\Omega)} \leq |||u|||_\varphi |||v|||_{\varphi^*}.$$

Aufgabe 4 (Weitere Hölder'sche Ungleichungen) (2 Punkte)

Sei $\varphi : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine reguläre N–Funktion, sodass $\varphi, \varphi^* \in \Delta_2$, und $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, ein beschränktes Gebiet. Zeigen Sie, dass für alle $u \in L^\varphi(\Omega)$ und $v \in L^{\varphi^*}(\Omega)$ gilt, dass

$$\begin{aligned}\|uv\|_{L^1(\Omega)} &\leq \|u\|_{L^\varphi(\Omega)} |||v|||_{\varphi^*} \leq 2\|u\|_{L^\varphi(\Omega)}\|v\|_{L^{\varphi^*}(\Omega)},\\ \|uv\|_{L^1(\Omega)} &\leq |||u|||_\varphi \|v\|_{L^{\varphi^*}(\Omega)} \leq 2\|u\|_{L^\varphi(\Omega)}\|v\|_{L^{\varphi^*}(\Omega)}.\end{aligned}$$

Aufgabe 5 (Eigenschaften von Orlicz–Sobolev–Räumen) (5 Punkte)

Sei $\varphi : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine reguläre N–Funktion, sodass $\varphi, \varphi^* \in \Delta_2$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, ein beschränktes Gebiet und $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $W^{k,\varphi}(\Omega)$ ein separabler und reflexiver Banach–Raum ist.