**Aufgabe 1** (Duale Knotenbasis) (6 Punkte)

Sei $z \in \mathcal{N}_h$ ein Knoten und $\sigma_z$ definiert gemäß der Vorlesung.

**(i)** Zeigen Sie, dass $d_i \in P_{\sigma_z}$, $i = 1, \dots, N(z)$, existieren, sodass

$$\int_{\sigma_z} d_i b_j \, ds = \delta_{ij}$$

für alle $i, j = 1, \dots, N(z)$ gilt, wobei $b_j \in P_{\sigma_z}$, $j = 1, \dots, N(z)$, die Knotenbasis von $\sigma_z$ bezeichnet.

**(ii)** Zeigen Sie, dass $\|d_i\|_{L^\infty(\sigma_z)} \le \frac{c}{h_{T_z}} \dim(\sigma_z)$ für alle $i = 1, \dots, N(z)$ gilt.

**Aufgabe 2** (Divergenzerhaltender Interpolationsoperator) (8 Punkte)

Sei $\mathcal{T}_h$, $h > 0$, eine reguläre Triangulierung, $s_T$, $T \in \mathcal{T}_h$, die zugehörigen Bubble–Funktionen, d.h.

$$s_T = \varphi_{z_1} \dots \varphi_{z_{d+1}},$$

wobei $z_i \in \mathcal{N}_h \cap T$, $i = 1, \dots, d+1$, und $\varphi_{z_i} \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h)$, $i = 1, \dots, d+1$, nodale Basiselemente sind. Bezeichne $\Pi_h : W^{1,1}(\Omega) \to (X_h)^d$ den vektorwertigen Scott–Zhang–Interpolationsoperator. Wir definieren den Interpolationsoperator $\Pi_h^{\text{div}} : W^{1,1}(\Omega)^d \to W^{1,1}(\Omega)^d$ für alle $\mathbf{u} \in W^{1,1}(\Omega)^d$ durch

$$\Pi_h^{\text{div}} \mathbf{u} := \Pi_h \mathbf{u} - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \mathbf{c}_T s_T, \qquad \text{wobei } \mathbf{c}_T := \frac{\fint_T \Pi_h \mathbf{u} - \mathbf{u} \, dx}{\fint_T s_T \, dx} \in \mathbb{R}^d.$$

Zeigen Sie, dass $\Pi_h^{\text{div}} : W^{1,1}(\Omega)^d \to W^{1,1}(\Omega)^d$ die folgenden Eigenschaften erfüllt:

**(i)** Für alle $\mathbf{u} \in W^{1,1}(\Omega)^d$ und $v_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h)$ gilt

$$\int_\Omega \operatorname{div}(\Pi_h^{\text{div}} \mathbf{u}) v_h \, dx = \int_\Omega \operatorname{div}(\mathbf{u}) v_h \, dx$$

**(ii)** $\Pi_h^{\text{div}}(W_0^{1,1}(\Omega)^d) \subseteq W_0^{1,1}(\Omega)^d$.

**(iii)** Für alle $\mathbf{u} \in W^{1,1}(\Omega)^d$ und $T \in \mathcal{T}_h$ gilt

$$\fint_T |\Pi_h^{\text{div}} \mathbf{u}| \, dx \le c \left( \fint_{S_T} |\mathbf{u}| \, dx + \fint_{S_T} |\nabla \mathbf{u}| \, dx \right).$$

**Aufgabe 3** (Stabilität von semi-implizitem $L^2$–Fluss zu $p$–Laplace–Problem) (6 Punkte)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, ein beschränktes Gebiet und $f \in L^{p'}(\Omega)$, $p \in (1, \infty)$.

**(i)** Zeigen Sie, dass für die regularisierten $p$–Dirichlet–Energien, d.h. $(\varphi_\varepsilon^p)_\varepsilon \subseteq C^1(\mathbb{R}_{\geq 0})$, definiert durch $\varphi_\varepsilon^p(a) := \frac{1}{p}(a^2 + \varepsilon^2)^{\frac{p}{2}}$ für alle $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $\varepsilon > 0$, gilt:

$$\frac{(\varphi_\varepsilon^p)'(|a|)}{|a|} b \cdot (b - a) \geq \varphi_\varepsilon^p(|b|) - \varphi_\varepsilon^p(|a|) + \frac{1}{2} \frac{(\varphi_\varepsilon^p)'(|a|)}{|a|} |b - a|^2$$

für alle $a, b \in \mathbb{R}^d$ und $\varepsilon > 0$.

**Tipp:** Sie können ohne Beweis verwenden, dass $(\varphi_\varepsilon^p)_\varepsilon \subseteq C^1(\mathbb{R}_{\geq 0})$ konvex ist und, dass $(a \mapsto (\varphi_\varepsilon^p)'(a)/a) : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{>0}$ für alle $\varepsilon > 0$ positiv, monoton fallend und stetig ist.

**(ii)** Zeigen Sie, dass für die Iterierten $(u^k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq W_0^{1,p}(\Omega)$ der semi-implizite Diskretisierung des $L^2$–Fluss zum regularisierten $p$–Laplace–Problem, d.h. für alle $k \in \mathbb{N}$ und $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$

$$\int_\Omega d_t u^k v \, dx + \int_\Omega \frac{(\varphi_\varepsilon^p)'(|\nabla u^{k-1}|)}{|\nabla u^{k-1}|_\varepsilon} \nabla u^k \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega f v \, dx,$$

das diskrete Energiegesetz

$$\int_\Omega \varphi_\varepsilon^p(|\nabla u^L|_\varepsilon) - f u^L \, dx + \tau \sum_{k=1}^{L} \|d_t u^k\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \int_\Omega \varphi_\varepsilon^p(|\nabla u^L|_\varepsilon) - f u^0 \, dx.$$

für alle $L \in \mathbb{N}$ gilt.