Theorie und Numerik für nichtlineare PDEs, Blatt 14 WS 2021

Prof. Dr. S. Bartels, Prof. Dr. M. Růžička, Dr. A. Kaltenbach **Abgabetermin:** 09.02.22

Aufgabe 1 (Primaler Quasi-Interpolant) (5 Punkte)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ ein beschränktes und stern-förmiges Gebiet, $\varepsilon > 0$, und $\mathcal{T}_h$, $h > 0$, eine reguläre Triangulierung. Zeigen Sie, dass ein $c > 0$ existiert, sodass für jedes $u \in BV(\Omega)$ ein $u_{\varepsilon,h} \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h)$ existiert mit

$$\begin{aligned} \|\nabla u_{\varepsilon,h}\|_{L^1(\Omega)^2} &\leq (1 + ch\varepsilon^{-1} + c\varepsilon)|Du|(\Omega), \\ \|u_{\varepsilon,h} - u\|_{L^1(\Omega)} &\leq c(h^2\varepsilon^{-1} + \varepsilon)|Du|(\Omega). \end{aligned}$$

Falls zusätzlich $u \in L^\infty(\Omega)$, dann gilt auch $\|u_{\varepsilon,h}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|u\|_{L^\infty(\Omega)}$.

Aufgabe 2 (Quasi-optimale Konvergenzrate bezüglich $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$) (5 Punkte)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ ein beschränktes und stern-förmiges Gebiet, $p \in (1, \infty)$ und $\mathcal{T}_h$, $h > 0$, eine reguläre Triangulierung. Zeigen Sie, dass für jedes $u \in BV(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ ein $c(u) > 0$ existiert, sodass

$$\inf_{v_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h)} \|u - v_h\|_{L^p(\Omega)} \leq c(u) h^{\frac{1}{p}}.$$

Tipp: Verwenden Sie Aufgabe 1.

Aufgabe 3 (Schwache Unterhalbstetigkeit der Totalvariation) (5 Punkte)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, ein beschränktes Lipschitz–Gebiet und $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq BV(\Omega)$ erfülle $u_n \to u$ in $L^1(\Omega)$ $(n \to \infty)$ und $\sup_{n\in\mathbb{N}} |Du_n|(\Omega) < \infty$. Zeigen Sie, dass $u \in BV(\Omega)$ mit $|Du|(\Omega) \leq \liminf_{n\to\infty} |Du_n|(\Omega)$ sowie $u_n \rightharpoonup u$ in $BV(\Omega)$ $(n \to \infty)$.

Aufgabe 4 (Sobolev–Einbettung für $BV(\Omega)$) (5 Punkte)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, ein beschränktes Lipschitz–Gebiet. Dann existiert ein $c > 0$, sodass für alle $u \in BV(\Omega)$ gilt $u \in L^{1^*}(\Omega)$, wobei $1^* = \frac{d}{d-1}$, und

$$\|u\|_{L^{1^*}(\Omega)} \leq c\|u\|_{BV(\Omega)}.$$

Weiter gilt für alle $q \in [1, 1^*)$ die kompakte Einbettung $BV(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega)$.

Tipp: Nutzen Sie, dass $C^\infty(\overline{\Omega})$ bezüglich strikter Konvergenz dicht in $BV(\Omega)$ liegt.

Zusatz–Aufgabe (Ein wichtiges Beispiel für eine BV–Funktion) (5 Punkte)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, ein beschränktes Gebiet und $E \subseteq \Omega$ ein Lipschitz–Gebiet. Zeigen Sie, dass $\chi_E \in BV(\Omega)$ und $|D\chi_E|(\Omega) = \mathscr{H}^{d-1}(\partial E)$.

Tipp: Nutzen Sie den Satz von Gaus.