Theorie und Numerik für nichtllineare PDEs, Blatt 2 WS 2021

Prof. Dr. S. Bartels, Prof. Dr. M. Růžička, M.Sc. A. Kaltenbach **Abgabetermin:** 01.11.21

Aufgabe 1 ((Nicht) schwach abgeschlossene Mengen) (5 Punkte)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, ein beschränktes Lipschitz–Gebiet. Diskutieren Sie, welche der folgenden Teilmengen konvex, abgeschlossen und/oder schwach abgeschlossen im jeweils angegebenen Banach–Raum sind:

(i) $\mathcal{A}_1 := \{u \in W^{1,2}(\Omega) \mid \|u\|_{L^2(\Omega)} = 1\}$ in $W^{1,2}(\Omega)$.

(ii) $\mathcal{A}_2 := \{u \in L^2(\Omega) \mid \|u\|_{L^2(\Omega)} = 1\}$ in $L^2(\Omega)$.

(iii) $\mathcal{A}_3 := \{u \in L^2(\Omega) \mid \|u\|_{L^2(\Omega)} \le 1\}$ in $L^2(\Omega)$.

(iv) $\mathcal{A}_4 := \{u \in L^2(\Omega) \mid \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u\,dx = c\}$ in $L^2(\Omega)$ für ein $c \in \mathbb{R}$.

(v) $\mathcal{A}_5 := \{u \in W^{1,2}(\Omega) \mid \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u\,dx = c\}$ in $W^{1,2}(\Omega)$ für ein $c \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 2 (Charakterisierung von schwacher Konvergenz in $W^{1,p}(\Omega)$) (2 Punkte)

Sei $p \in (1,\infty)$ und $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, offen. Zeigen Sie, dass für eine Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq W^{1,p}(\Omega)$ die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) $u_n \rightharpoonup u$ in $W^{1,p}(\Omega)$ $(n \to \infty)$.

(ii) $u_n \rightharpoonup u$ in $L^p(\Omega)$ $(n \to \infty)$ und $\nabla u_n \rightharpoonup \nabla u$ in $L^p(\Omega)^d$ $(n \to \infty)$.

Tipp: Verwenden, dass $\Pi : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\Omega) \times L^p(\Omega)^d$, für alle $u \in W^{1,p}(\Omega)$ definiert durch

$$\Pi u = (u, \nabla u)^\top \quad \text{in } L^p(\Omega) \times L^p(\Omega)^d,$$

eine Isometrie ist und dass $(f_n, \mathbf{f}_n)^\top \rightharpoonup (f, \mathbf{f})^\top$ in $L^p(\Omega) \times L^p(\Omega)^d$ $(n \to \infty)$ genau dann, wenn $f_n \rightharpoonup f$ in $L^p(\Omega)$ $(n \to \infty)$ und $\mathbf{f}_n \rightharpoonup \mathbf{f}$ in $L^p(\Omega)^d$ $(n \to \infty)$.

Aufgabe 3 (Charakterisierung von starker Konvergenz in $L^p(\Omega)$) (4 Punkte)

Sei $p \in (1,\infty)$ und $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, offen. Zeigen Sie, dass für eine Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^p(\Omega)$ die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) $u_n \to u$ in $L^p(\Omega)$ $(n \to \infty)$.

(ii) $u_n \rightharpoonup u$ in $L^p(\Omega)$ $(n \to \infty)$ und $\|u_n\|_{L^p(\Omega)} \to \|u\|_{L^p(\Omega)}$ $(n \to \infty)$.

Tipp: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass $L^p(\Omega)$ für $p \in (1,\infty)$ gleichmäßig konvex ist.

Aufgabe 4 (Kritische Minimierungsprobleme) (5 Punkte)

Zeigen Sie, dass die folgenden Minimierungsprobleme keine Minima besitzen und erläutern Sie, welche Voraussetzungen der direkten Methode verletzt bzw. erfüllt sind:

(i) Minimiere $I : \mathcal{A} := W^{1,4}(0,1) \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$I(u) = \int_0^1 (u'(x)^2 - 1)^2 + u(x)^4\,dx \quad \text{für alle } u \in \mathcal{A}.$$

Tipp: Verwenden Sie Aufgabe 1 von Blatt 1.

(ii) Minimiere $I : \mathcal{A} := \{u \in W^{1,2}(-1,1) \mid u(\pm 1) = \pm 1\} \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$I(u) = \int_{-1}^{1} (xu'(x))^2 \, dx \qquad \text{für alle } u \in \mathcal{A}.$$

Aufgabe 5 (Poisson–Problem mit Nichtlinearität) (4 Punkte)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, ein beschränktes Gebiet und $F \in C^0(\mathbb{R})$ mit $\|F\|_{L^\infty(\mathbb{R})} < \infty$ konvex. Zeigen Sie, dass $I : \mathcal{A} := W_0^{1,2}(\Omega) \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$I(u) := \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx + \int_\Omega F(u) \, dx \qquad \text{für alle } u \in \mathcal{A},$$

ein eindeutiges Minimum besitzt.

Tipp: Verwenden Aufgabe 4 von Blatt 1.