Aufgabe 1 (Projektion von $L^2(\Omega)$ nach $\mathbb{R}$) (2 Punkte)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, ein beschränktes Gebiet, $u \in L^2(\Omega)$ und $\langle u\rangle_\Omega := \fint_\Omega u\,dx$. Zeigen Sie, dass $\|u - \langle u\rangle_\Omega\|_{L^2(\Omega)} = \inf_{c\in\mathbb{R}} \|u - c\|_{L^2(\Omega)}$ gilt.

Aufgabe 2 (Sobolev–Regularität in Abhängigkeit von der Dimension) (5 Punkte)

Sei $\Omega := B_r^d(0) \subseteq \mathbb{R}^d$, $d \in \{2,3\}$, und $u : \Omega \to \mathbb{R}^d$ definiert durch $u(x) = \frac{x}{|x|}$ für fast alle $x \in \Omega$. Zeigen Sie, dass $u \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^d)$ für $d = 3$ und $u \notin W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^d)$ für $d = 2$.

Aufgabe 3 (Charakterisierung von starker Konvergenz in $W^{1,p}(\Omega)$) (5 Punkte)

Sei $p \in (1,\infty)$ und $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, offen. Zeigen Sie, dass für eine Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq W^{1,p}(\Omega)$ die folgenden Aussagen äquivalent sind:

- **(i)** $u_n \to u$ in $W^{1,p}(\Omega)$ $(n \to \infty)$.
- **(ii)** $u_n \to u$ in $L^p(\Omega)$ $(n \to \infty)$ und $\|\nabla u_n\|_{L^p(\Omega)^d} \to \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)^d}$ $(n \to \infty)$.

Tipp: Verwenden Sie Aufgabe 2 und Aufgabe 3 von Blatt 2.

Definition: (C^1–Gebiet)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, ein beschränktes Gebiet. Dann sagen wir, dass Ω ein C^1–Gebiet ist (geschrieben $\partial\Omega \in C^1$), wenn es für alle $x_0 \in \partial\Omega$ eine Funktion $\gamma \in C^1(\mathbb{R}^{d-1})$ und einen Radius $r > 0$ gibt, sodass

$$\Omega \cap B_r^d(x_0) = \{x = (x', x_d) = (x_1, \dots, x_{d-1}, x_d)^\top \in B_r^d(x_0) \mid x_d > \gamma(x')\},$$
$$\partial\Omega \cap B_r^d(x_0) = \{x = (x', x_d) = (x_1, \dots, x_{d-1}, x_d)^\top \in B_r^d(x_0) \mid x_d = \gamma(x')\}.$$

Die Plättungstransformation $\Phi : \Omega \cap B_r^d(x_0) \to \Phi(\Omega \cap B_r^d(x_0))$, definiert durch

$$\Phi(x', x_d) = (x', x_d - \gamma(x'))^\top$$

für alle $x = (x', x_d)^\top = (x_1, \dots, x_{d-1}, x_d)^\top \in \Omega \cap B_r^d(x_0)$, ist ein Diffeomorphismus mit $\det(\nabla\Phi) = 1$ in $\Omega \cap B_r^d(x_0)$ und erfüllt

$$\Phi(\partial\Omega \cap B_r^d(x_0)) = \{x = (x', x_d) = (x_1, \dots, x_{d-1}, x_d)^\top \in B_r^d(x_0) \mid x_d = 0\}.$$

Seine Inverse $\Psi := \Phi^{-1} : \Phi(\Omega \cap B_r^d(x_0)) \to \Omega \cap B_r^d(x_0)$ ist gegeben durch $\Psi(y) = (y', y_d + \gamma(y))^\top$ für alle $y = (y', y_d)^\top = (y_1, \dots, y_{d-1}, y_d)^\top \in \Phi(\Omega \cap B_r^d(x_0))$ und erfüllt $\det(\nabla\Psi) = 1$ in $\Phi(\Omega \cap B_r^d(x_0))$.

Aufgabe 4 (Spursatz für Sobolev–Räume) (8 Punkte)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, ein beschränktes C^1–Gebiet und $p \in [1,\infty)$.

- **(i)** Zeigen Sie, dass es eine Konstante $K > 0$ gibt, sodass

$$\|u\|_{L^p(\partial\Omega)} \le K\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

für alle $u \in C^1(\overline{\Omega})$ gilt. Gehen Sie dazu in den folgenden Schritten vor:

1. Schritt: Zeigen Sie, dass falls der Rande $\partial\Omega$ nahe $x_0 \in \partial\Omega$ flach ist, d.h.

$$\partial\Omega \cap B_r^d(x_0) = \{(x', x_d)^\top \in \mathbb{R}^d \mid x_d = 0\} \cap B_r^d(x_0),$$

dann existiert eine Konstante $K > 0$, sodass

$$\int_{B^d_{\frac{r}{2}}(x_0)\cap\partial\Omega} |u|^p \, dx' \leq c \int_{B_r^+(x_0)\cap\partial\Omega} |u|^p + |\nabla u|^p \, dx,$$

wobei $B_r^+(x_0) := \{(x', x_n)^\top \in B_r^d(x_0) \mid x_n \geq 0\}$.

Tipp: Nutzen Sie, dass für $\tau \in C_0^\infty(B_r^d(x_0))$ mit $\tau = 1$ in $B^d_{\frac{r}{2}}(x_0)$ und $\tau \geq 0$ gilt, dass $\int_{B_r^d(x_0)\cap\{x_n=0\}} |u|^p \tau \, dx' = -\int_{\partial B_r^+(x_0)} |u|^p \tau \nu_d \, dx'$, wobei ν_d die d–te Komponente des äußeren Normalenfelds zu $B_r^+(x_0)$ ist, und integrieren Sie partiell.

2. Schritt: Zeigen Sie, dass falls der Rand $\partial\Omega$ nahe $x_0 \in \partial\Omega$ nicht flach ist, d.h. es existieren $\gamma \in C^1(\mathbb{R}^{d-1})$ und $r > 0$, sodass

$$\Omega \cap B_r^d(x_0) = \{x = (x', x_d) \in B_r^d(x_0) \mid x_d > \gamma(x')\},$$
$$\partial\Omega \cap B_r^d(x_0) = \{x = (x', x_d) \in B_r^d(x_0) \mid x_d = \gamma(x')\},$$

dann existiert eine Konstante $K > 0$, sodass

$$\int_{B^d_{\frac{r}{2}}(x_0)\cap\partial\Omega} |u|^p \, do(s) \leq c \int_{B_r^d(x_0)\cap\partial\Omega} |u|^p + |\nabla u|^p \, dx.$$

Tipp: Betrachten Sie $\Phi : \Omega \cap B_r^d(x_0) \to \Phi(\Omega \cap B_r^d(x_0))$, definiert durch $\Phi(x', x_d) = (x', x_d - \gamma(x'))^\top$ für alle $x = (x', x_d)^\top \in \Omega \cap B_r^d(x_0)$, wenden Sie den 1. Schritt auf $\tilde{u} := u \circ \Phi^{-1}$ an und nutzen Sie den Transformationssatz.

3. Schritt: Folgern Sie aus dem 1. Schritt und dem 2. Schritt zusammen mit der Kompaktheit von $\partial\Omega$ die Aussage (i).

(ii) Zeigen Sie, dass es einen Operator $R : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$ gibt, sodass $Ru = u|_{\partial\Omega}$ in $\partial\Omega$ für alle $u \in C^1(\overline{\Omega})$ und für eine Konstante $K > 0$ gilt für alle $u \in W^{1,p}(\Omega)$

$$\|Ru\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq K\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

Tipp: Nutzen Sie Punkt (i) sowie die Dichtheit von $C^\infty(\overline{\Omega})$ in $W^{1,p}(\Omega)$.

Bemerkung: Aufgabe 4 lässt sich auch auf den Fall verallgemeinern, dass $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, nur ein beschränktes Lipschitz–Gebiet ist.