Aufgabe 1 (Ginzburg–Landau–Regularisierung, Teil 1) (6 Punkte)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, ein beschränktes Lipschitz–Gebiet und $\tilde{u}_{\mathrm{D}} \in W^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^m)$, $m \in \mathbb{N}$, so, dass $|\tilde{u}_{\mathrm{D}}| = 1$ in Ω. Zeigen Sie, dass die Funktionale $I_\varepsilon : \mathcal{A} := \{v \in W^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^m) \mid v = \tilde{u}_{\mathrm{D}} \text{ auf } \partial\Omega\} \to \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, definiert durch

$$I_\varepsilon(u) := \frac{1}{2}\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)^{m\times d}} + \frac{1}{2\varepsilon^2}\||u|^2 - 1\|^2_{L^2(\Omega)},$$

für alle $u \in \mathcal{A}$, Minima $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0} \subseteq \mathcal{A}$ besitzen.

Tipp: Um zu zeigen, dass die Funktionale $I_\varepsilon : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, schwach unterhalbstetig sind, nutzen Sie für $(u \mapsto \frac{1}{2\varepsilon^2}\||u|^2 - 1\|^2_{L^2(\Omega)}) : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, den Satz von Rellich und das Lemma von Fatou.

Aufgabe 2 (Kompatible Gradienten) (8 Punkte)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, ein beschränktes Lipschitz–Gebiet, $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^d$, sodass $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$, $\theta \in [0,1]$, und $\mathbf{c} := \theta\mathbf{a} + (1-\theta)\mathbf{b} \in \mathbb{R}^d$. Sei $u_{\mathbf{c}} \in W^{1,\infty}(\Omega)$ definiert durch $u_{\mathbf{c}} := \mathbf{c} \cdot x$ für alle $x \in \Omega$. Zeigen Sie, dass es für alle $\varepsilon > 0$ ein $v_\varepsilon \in W^{1,\infty}(\Omega)$ gibt, sodass $\|v_\varepsilon - u_{\mathbf{c}}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c\varepsilon$, $\|\nabla v_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)^d} \leq c$, $v_\varepsilon = u_{\mathbf{c}}$ in $\partial\Omega$ und für $\Omega^\varepsilon_X := \{\nabla v_\varepsilon = X\}$, wobei $X \in \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$, gilt:

$$|\Omega^\varepsilon_{\mathbf{a}}| \leq \theta|\Omega| + c\varepsilon, \quad |\Omega^\varepsilon_{\mathbf{b}}| \leq (1-\theta)|\Omega| + c\varepsilon, \quad |\Omega \setminus (\Omega^\varepsilon_{\mathbf{a}} \cup \Omega^\varepsilon_{\mathbf{b}})| \leq c\varepsilon. \tag{1}$$

Gehen Sie dazu in den folgenden Schritten vor (pro Schritt gibt es 2 Punkte, wobei der 4. Schritt 2 Zusatzpunkte gibt):

1. Schritt: Zeigen Sie, dass es ausreicht den Fall $\mathbf{c} = \mathbf{0}$ zu betrachten.

2. Schritt: Zeigen Sie, dass es zu beliebigem $\varepsilon > 0$ ein $\eta_\varepsilon \in W^{1,\infty}_0(\Omega)$ gibt, sodass $\eta_\varepsilon = 1$ fast überall in $\Omega_\varepsilon := \{x \in \Omega \mid \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$ und $\|\nabla \eta_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)^d} \leq \frac{c}{\varepsilon}$.

3. Schritt: Zeigen Sie, dass es zu beliebigem $\varepsilon > 0$ ein $\tilde{v}_\varepsilon \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d)$ gibt, sodass

$$\nabla \tilde{v}_\varepsilon(x) = \begin{cases} \mathbf{a} & \text{falls } k\varepsilon < (\mathbf{b} - \mathbf{a}) \cdot x \leq (k+\theta)\varepsilon \text{ und } k \in \mathbb{Z} \\ \mathbf{b} & \text{falls } (k+\theta)\varepsilon < (\mathbf{b} - \mathbf{a}) \cdot x \leq (k+1)\varepsilon \text{ und } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

für alle $x \in \mathbb{R}^d$ gilt.

Tipp: Betrachten Sie $\tilde{v}_\varepsilon \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d)$, für alle $x \in \mathbb{R}^d$ definiert durch

$$\tilde{v}_\varepsilon(x) := \mathbf{a} \cdot x - \int_0^{(\mathbf{b}-\mathbf{a})\cdot x} \tilde{\chi}(\tfrac{t}{\varepsilon})\, dt,$$

wobei $\tilde{\chi} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $\tilde{\chi} = 0$ in $(0,\theta)$ und $\tilde{\chi} = 1$ in $(\theta, 1)$ definiert ist und periodisch auf ganz $\mathbb{R}$ fortgesetzt ist.

4. Schritt: Zeigen Sie, dass es eine Konstante $c > 0$ gibt, sodass $\|\tilde{v}_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c\varepsilon$ für alle $\varepsilon > 0$.

5. Schritt: Zeigen Sie, dass für alle $\varepsilon > 0$ die Funktion $v_\varepsilon = \tilde{v}_\varepsilon \eta_\varepsilon \in W^{1,\infty}_0(\Omega)$ sowohl $\|\nabla v_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)^d} \leq c$ und $\|v_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c\varepsilon$ als auch (1) erfüllt.

Aufgabe 3 (Schwach unterhalbstetig $\Leftrightarrow$ konvex + stetig für $m = 1$) (6 Punkte)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, ein beschränktes Lipschitz–Gebiet, $p \in [1, \infty)$, $W \in C^0(\mathbb{R}^d)$ mit $|W(\mathbf{a})| \leq c(1 + |\mathbf{a}|^p)$ für alle $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^d$ und $I : W^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ für alle $u \in W^{1,p}(\Omega)$ definiert durch

$$I(u) := \int_\Omega W(\nabla u)\, dx.$$

Zeigen Sie, dass $I : W^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ genau dann schwach unterhalbstetig ist, wenn es konvex ist.

Tipp: Verwenden Sie für die Hinrichtung Aufgabe 2, um für $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^d$, sodass $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$, und $\theta \in [0, 1]$ eine Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq W^{1,\infty}(\Omega)$ zu konstruieren, die $\nabla u_n \rightharpoonup \theta\mathbf{a} + (1-\theta)\mathbf{b}$ in $L^p(\Omega)^d$ und $\liminf_{n\to\infty} I(u_n) \leq \theta|\Omega|W(\mathbf{a}) + (1-\theta)|\Omega|W(\mathbf{b})$ erfüllt und nutzen Sie dann die schwache Unterhalbstetigkeit von $I : W^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$.