Aufgabe 1 (Nicht-Existenz wegen $\mathcal{A} = \emptyset$) (2 Punkte)

Sei $\Omega := (-1, 1) \subseteq \mathbb{R}$ und $u_{\mathrm{D}}(\pm 1) := \pm 1$. Zeigen Sie, dass kein $\tilde{u}_{\mathrm{D}} \in W^{1,2}(\Omega)$ existiert mit $|\tilde{u}_{\mathrm{D}}| = 1$ und $\tilde{u}_{\mathrm{D}} = u_{\mathrm{D}}$ in $L^2(\partial\Omega)$.

Bemerkung: Diese Aufgabe zeigt, warum es für die Wohlgestelltheit des Minimierungsproblem für harmonische Abbildungen nicht ausreicht Randwerte $u_{\mathrm{D}} \in L^2(\partial\Omega; \mathbb{R}^m)$ mit $|u_{\mathrm{D}}| = 1$ fast überall in $\partial\Omega$ vorzugeben. Denn dann kann immer noch der Fall $\mathcal{A} := \{v \in W^{1,2}(\Omega; \mathbb{R}^m) \mid |v| = 1 \text{ f.ü. in } \Omega, \tilde{u}_{\mathrm{D}} = u_{\mathrm{D}} \text{ in } L^2(\partial\Omega; \mathbb{R}^m)\} = \emptyset$ auftreten.

Aufgabe 2 (Ginzburg–Landau–Regularisierung, Teil 2) (6 Punkte)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, ein beschränktes Lipschitz–Gebiet und $\tilde{u}_{\mathrm{D}} \in W^{1,2}(\Omega; \mathbb{R}^m)$, $m \in \mathbb{N}$, so, dass $|\tilde{u}_{\mathrm{D}}| = 1$ in Ω. Zeigen Sie, dass schwache Häufungspunkte (bzgl. $W^{1,2}(\Omega; \mathbb{R}^m)$) der Familie von Minima $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0} \subseteq \mathcal{A}$ zu $I_\varepsilon : \mathcal{A} := \{v \in W^{1,2}(\Omega; \mathbb{R}^m) \mid v = \tilde{u}_{\mathrm{D}} \text{ in } L^2(\partial\Omega; \mathbb{R}^m)\} \to \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, definiert durch

$$I_\varepsilon(u) := \frac{1}{2}\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)^{m\times d}} + \frac{1}{2\varepsilon^2}\||u|^2 - 1\|^2_{L^2(\Omega)},$$

harmonische Abbildungen sind. Zeigen Sie dazu zunächst, dass die Familie von Minima $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0} \subseteq \mathcal{A}$ in $W^{1,2}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ beschränkt ist, d.h. schwache Häufungspunkte in $W^{1,2}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ existieren und sind zulässig im Minimierungsproblem für harmonische Abbildungen.

Tipp: Aufgabe 1 von Blatt 4 hat die Existenz der Familie von Minima $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0} \subseteq \mathcal{A}$ bereits sichergestellt.

Bemerkung: Die Ginzburg–Landau–Regularisierung ist als Penalisierungsapproximation zu verstehen, d.h. Minima $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0} \subseteq \mathcal{A}$ müssen $|u_\varepsilon| = 1$ f.ü. in Ω nicht erfüllen. Der Penalisierungsterm $(u \mapsto \frac{1}{2\varepsilon^2}\||u|^2 - 1\|^2_{L^2(\Omega)} : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, bestraft aber dieses Nichterfüllen mit großen Werten, sodass der Verstoß für Minima für $\varepsilon \to 0$ kleiner wird, d.h. $|u_\varepsilon| \approx 1$ für $\varepsilon \to 0$. Der Vorteil von solchen Penalisierungsapproximationen ist, dass sie mit Standardverfahren, wie bspw. Abstiegsverfahren, behandelt werden können.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, ein beschränktes Gebiet.

(i) Seien $u, v \in \mathbb{R}^d$ mit $u \neq 0$ und $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$. Bestimmen Sie die Ableitung von $\phi : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, definiert durch $\phi(t) = \frac{1}{2}|A(\frac{u+tv}{|u+tv|})|^2$ für alle $t \in \mathbb{R}$, in $t = 0$.

(ii) Sei $u \in \mathcal{A} := \{v \in W^{1,2}(\Omega; \mathbb{R}^d) \mid |v| = 1 \text{ f.ü. in } \Omega\}$ ein Minimum von $I : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$I(v) := \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2\, dx$$

für alle $v \in \mathcal{A}$. Bestimmen Sie die zugehörigen Euler–Lagrange–Gleichungen, indem Sie für alle $v \in C_0^\infty(\Omega; \mathbb{R}^d)$ die Funktionen $\phi_v : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, definiert durch $\phi_v(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla(\frac{u+tv}{|u+tv|})|^2\, dx$ für alle $t \in \mathbb{R}$, in $t = 0$ ableiten.

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Sei $\Omega := B_r^d(0) \subseteq \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, und $u : \Omega \to \mathbb{R}^d$ definiert durch $u(x) = \frac{x}{|x|}$ für alle $x \in \Omega \setminus \{0\}$. Zeigen Sie, dass

$$-\Delta u = |\nabla u|^2 u \quad \text{in } \Omega \setminus \{0\}.$$

Begründen Sie, ob $u : \Omega \to \mathbb{R}^d$ für $d \in \{2, 3\}$ eine harmonische Abbildung im Sinne der Vorlesung ist.

Tipp: In Aufgabe 2 von Blatt 3 haben wir bereits gezeigt, dass $u \in W^{1,2}(\Omega; \mathbb{R}^d)$ für $d = 3$ und $u \notin W^{1,2}(\Omega; \mathbb{R}^d)$ für $d = 2$.