# Theorie und Numerik nichtlineare PDEs, Übungsblatt 6 WS 2021

Prof. Dr. S. Bartels, Prof. Dr. M. Růžička, Dr. A. Kaltenbach **Abgabetermin:** 29.11.21

**Aufgabe 1** (4 Punkte)

Sei $\Omega := (0,1) \subseteq \mathbb{R}$ und $u \in \mathcal{A} := \{v \in W^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^3) \mid |v(t)| = 1 \text{ für a.e. } t \in \Omega, v(0) = e_1 = (1,0,0)^\top, v(1) = -e_1\}$, definiert durch $u(t) = (\cos(\pi t), 0, \sin(\pi t))^\top$ für alle $t \in \Omega$. Zeigen Sie, dass $u_k \in \mathcal{A}$, wobei $k \in \mathbb{N}$, definiert durch $u_k(t) := u((2k+1)t)$ für alle $t \in \Omega$, eine harmonische Abbildung ist, aber nicht Energie minimierend.

**Tipp:** Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass $u \in \mathcal{A}$ eine Energie minimierende harmonische Abbildung ist.

**Aufgabe 2** (5 Punkte)

Sei $\Omega := B_1^d(0) \subseteq \mathbb{R}^d$, $d \geq 3$, und $u \in W^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^d)$ so, dass $|u| = 1$ a.e. in $\Omega$ und $u = \mathrm{id}$ auf $\mathbb{S}^{d-1}$. Zeigen Sie, dass

$$\int_\Omega \left[(\operatorname{div} u)^2 - \operatorname{tr}(\nabla u)^2 \, dx\right] = (d-1)\mathscr{H}^{d-1}(\mathbb{S}^{d-1}).$$

**Tipp:** Zeigen Sie, dass $\operatorname{div}[(\operatorname{div} u)u - (\nabla u)u] = (\operatorname{div} u)^2 - \operatorname{tr}(\nabla u)^2$ a.e. in $\Omega$ gilt und nutzen Sie den Satz von Gauß. Hierbei ist $\operatorname{tr}(\nabla u)^2 = \sum_{i,j=1}^d \partial_j u_i \partial_i u_j$.

**Aufgabe 3** (5 Punkte)

Sei $\Omega := B_1^d(0) \subseteq \mathbb{R}^d$, $d \geq 3$. Zeigen Sie, dass $u \in W^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^d)$, für alle $x \in \Omega \setminus \{0\}$ definiert durch $u(x) := \frac{x}{|x|}$, ein Minimum von $I : \mathcal{A} := \{u \in W^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^d) \mid |u| = 1 \text{ a.e. in } \Omega, u = \mathrm{id} \text{ a.e. in } \mathbb{S}^{d-1}\} \to \mathbb{R}$, definiert durch $I(v) := \frac{1}{2}\|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)^{d\times d}}$ für alle $v \in \mathcal{A}$, ist.

**Tipp:** Verwenden Sie Aufgabe 2 sowie, dass $|\nabla u|^2 + \frac{1}{d-2}\left[\operatorname{tr}(\nabla u)^2 - (\operatorname{div} u)^2\right] \geq 0$ a.e. in $\Omega$ für alle $u \in W^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^d)$ mit $|u| = 1$ a.e. in $\Omega$.

**Aufgabe 4** (6 Punkte)

Für $z, y \in \mathbb{R}^2$ bezeichne $S = \operatorname{conv}\{z, y\}$ eine gemeinsame Kante der Dreiecke $T_1, T_2$ und seien $\alpha_1, \alpha_2$ die der Kante gegenüberliegenden Innenwinkel von $T_1$ beziehungsweise $T_2$. Zeigen Sie, dass für die den Knoten zugeordneten Hutfunktionen $\varphi_z$ und $\varphi_y$ gilt, dass

$$\int_{T_1 \cup T_2} \nabla\varphi_z \cdot \nabla\varphi_y \, dx = -\frac{1}{2}(\cot\alpha_1 + \cot\alpha_2).$$

**Tipp:** Sie dürfen zusätzlich annehmen, dass $z = (0,0)^\top$ und $y = (1,0)^\top$. Zeigen Sie dann, dass $\nabla\varphi_z|_{T_1} = (-1, (c-1)/d)^\top$ und $\nabla\varphi_y|_{T_1} = (1, -c/d)^\top$, und verwenden Sie die Formel $\cot(\beta+\gamma) = (\cot(\beta)\cot(\gamma) - 1)/(\cot(\beta) + \cot(\gamma))$.

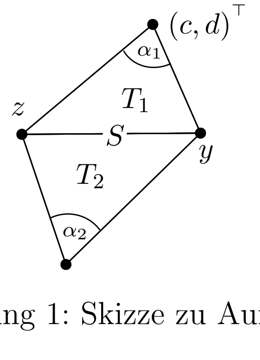


Abbildung 1: Skizze zu Aufgabe 4.