Theorie und Numerik nichtlineare PDEs, Übungsblatt 7 WS 2021

Prof. Dr. S. Bartels, Prof. Dr. M. Růžička, Dr. A. Kaltenbach **Abgabetermin:** 06.12.21

Aufgabe 1 (Kettenregel für Sobolev–Funktionen) (5 Punkte)

Sei $F \in C^1(\mathbb{R})$ mit $F(0) = 0$ und $\|F'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} < \infty$. Sei weiter $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, ein beschränktes Gebiet, $p \in (1, \infty)$ und $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Zeigen Sie, dass $F \circ u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ mit

$$\nabla(F \circ u) = (F' \circ u)\nabla u \quad \text{ in } L^p(\Omega; \mathbb{R}^d).$$

Bemerkung: Es ist auch möglich zu zeigen, dass falls $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nur Lipschitz–stetig ist mit $F(0) = 0$ und $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $p \in (1, \infty)$, dann ist $F \circ u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ mit $\nabla(F \circ u) = (F' \circ u)\nabla u$ in $L^p(\Omega; \mathbb{R}^d)$.

Aufgabe 2 (Abschneideargument) (5 Punkte)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, ein beschränktes Lipschitz–Gebiet und $u \in W^{1,2}(\Omega; \mathbb{R}^m)$, $m \in \mathbb{N}$, mit $|u| = 1$ f.ü. in Ω, sodass

$$(\nabla u, \nabla w) = 0 \tag{1}$$

für alle $w \in W_0^{1,2}(\Omega; \mathbb{R}^m) \cap L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^m)$ mit $u \cdot w = 0$ f.ü. in Ω. Zeigen Sie, dass (1) für alle $w \in W_0^{1,2}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ mit $u \cdot w = 0$ f.ü. in Ω gilt.

Tipp: Betrachten Sie für alle $w \in W_0^{1,2}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ die Folge $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^m)$, definiert durch

$$w_n := \left(1 - \min\left\{\frac{|w|^2}{n^2}, 1\right\}\right) w$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq W_0^{1,2}(\Omega; \mathbb{R}^m) \cap L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^m)$ (hier darf die Bemerkung nach Aufgabe 1 benutzt werden) mit $w_n \to w$ in $W_0^{1,2}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ $(n \to \infty)$.

Aufgabe 3 (Normierte Polynome sind konstant) (5 Punkte)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, und $p : \Omega \to \mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$, eine polynomielle Abbildung ersten Grades, d.h. für alle $x = (x_1, \ldots, x_d)^\top \in \Omega$ gilt

$$p(x) = p(x_1, \ldots, x_d) = a_0 + \sum_{i=1}^{d} a_i x_i,$$

wobei $a_i \in \mathbb{R}^m$, $i = 0, \ldots, d$, mit der Eigenschaft $|p(x)| = 1$ für alle $x \in \Omega$. Zeigen Sie, dass $p = a_0$ in Ω gilt.

Tipp: Sie können ohne Einschränkung annehmen, dass $0 \in \Omega$.

Zusatz: (2 Punkte) Lässt sich die Aussage von Aufgabe 3 auf beliebige Polynomgrade verallgemeinern?

Aufgabe 4 (Diskrete Kettenregel und diskretes Maximumsprinzip) (5 Punkte)

Sei $\mathcal{T}_h$, $h > 0$, eine reguläre Triangulierung des beschränkten Lipschitz–Gebiets $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, und $(\varphi_z)_{z\in\mathcal{N}_h}$ die nodale Basis von $\mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h)$, sodass für paarweise disjunkte verschiedene Knoten $z, y \in \mathcal{N}_h$ gilt

$$k_{zy} := \int_\Omega \nabla\varphi_z \cdot \nabla\varphi_y \, dx \leq 0.$$

Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen gelten:

(i) Für alle $v_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h)$ gilt:

$$\|\nabla v_h\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)} = -\frac{1}{2} \sum_{y,z\in\mathcal{N}_h} k_{zy} |v_h(z) - v_h(y)|^2.$$

(ii) Sei $\mathcal{I}_h : C^0(\overline{\Omega}) \to \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h)$ der nodale Interpolationsoperator. Für $F \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ und $v_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h)$ gilt:

$$\|\nabla\mathcal{I}_h(F \circ v_h)\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)} \leq \|F'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \|\nabla v_h\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)}.$$

(iii) Sei $u_{\mathrm{D},h} \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h)$ gegeben und sei $u_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h)$ minimal für $I_h : \mathcal{A}_h \to \mathbb{R}$, wobei $\mathcal{A}_h := \{v_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h) \mid v_h(z) = u_{\mathrm{D},h}(z) \text{ für alle } z \in \mathcal{N}_h \cap \Gamma_\mathrm{D}\}$, für alle $v_h \in \mathcal{A}_h$ definiert durch

$$I_h(v_h) = \frac{1}{2}\|\nabla v_h\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)}.$$

Zeigen Sie, dass dann $\max_{z\in\mathcal{N}_h} u_h(z) \leq \max_{z\in\mathcal{N}_h} u_{\mathrm{D},h}(z)$ gilt.