Aufgabe 1 (5 Punkte)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, ein beschränktes Lipschitz–Gebiet und $u \in W^{k,2}(\Omega;\mathbb{R}^m)$, $m,k \in \mathbb{N}$, mit $|u| \geq 1$ fast überall in Ω.

(i) Zeigen Sie, dass $Pu := \frac{u}{|u|} \in W^{1,2}(\Omega,\mathbb{R}^m)$ mit $\|\nabla Pu\|_{L^2(\Omega)^{m\times d}} \leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^{m\times d}}$ gilt.

(ii) Zeigen Sie, dass $\|D^2Pu\|_{L^2(\Omega)^{m\times d\times d}} \leq \|D^2u\|_{L^2(\Omega)^{m\times d\times d}}$ im Allgemeinen nicht gilt.
Tipp: Es reicht den Fall $d = 1$ und $m = 2$ zu betrachten.

Aufgabe 2 (Rechenregeln für Differenzenquotienten) (5 Punkte)

Sei H ein Hilbert–Raum, $(a^k)_{k\in\mathbb{N}}, (b^k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq H$ und $(c^k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$, wobei $c^k \neq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Für eine Schrittweite $\tau > 0$, bezeichne d_t den Rückwärts-Differenzenquotienten $d_t a^k := (a^k - a^{k-1})/\tau$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

(i) Leiten Sie die diskrete Produkt- und Quotientenregel her, d.h. für alle $k \in \mathbb{N}$

$$d_t(a^k, b^k)_H = (d_t a^k, b^{k-1})_H + (a^k, d_t b^k)_H,$$
$$d_t \frac{1}{c^k} = -\frac{d_t c_k}{c^{k-1}c^k}.$$

(ii) Zeigen Sie, dass für alle $k \in \mathbb{N}$

$$(a^{k-\theta}, d_t a^k)_H = \frac{1}{2} d_t \|a^k\|_H^2 + (1-2\theta)\frac{\tau}{2}\|d_t a^k\|_H^2$$

gilt, wobei $\theta \in [0,1]$ und $a^{k-\theta} = \theta a^{k-1} + (1-\theta)a^k$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Definition (Subgradienten und Subdifferentiale)

Sei X ein Banach–Raum und $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Dann heißt $x^* \in X^*$ Subgradient von f in $x \in X$, falls $f(x) \neq \infty$ und für alle $y \in X$

$$\langle x^*, y - x\rangle_X + f(x) \leq f(y)$$

gilt. Die mengenwertige Abbildung $\partial f : X \to 2^{X^*}$, für alle $x \in X$ definiert durch

$$(\partial f)(x) := \begin{cases} \{x^* \in X^* \mid \langle x^*, y-x\rangle_X + f(x) \leq f(y) \text{ für alle } y \in X\} & \text{falls } f(x) \neq \infty \\ \emptyset & \text{falls } f(x) = \infty \end{cases}$$

heißt Subdifferential von f. Eine Funktion $f : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ heißt in $x \in X$ subdifferenzierbar, falls $(\partial f)(x) \neq \emptyset$.

Aufgabe 3 (Konvex + Gâtteaux–differenzierbar $\Rightarrow$ subdifferenzierbar) (5 Punkte)

Sei X ein Banach–Raum und $f : X \to \mathbb{R}$ konvex. Falls $f : X \to \mathbb{R}$ in $x \in X$ Gâtteaux–differenzierbar ist, d.h. es existiert ein $(Df)(x) \in X^*$, sodass für alle $h \in X$

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x+th) - f(x)}{t} = \langle (Df)(x), h\rangle_X$$

gilt, dann ist $f : X \to \mathbb{R}$ in $x \in X$ subdifferenzierbar mit $(\partial f)(x) = \{(Df)(x)\}$.

Aufgabe 4 (Einige wichtige Beispiele) (5 Punkte)

Sei $d \in \mathbb{N}$.

(i) Bestimmen Sie $\partial f : \mathbb{R}^d \to 2^{\mathbb{R}^d}$ für die Funktion $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, definiert durch $f(x) := |x|$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$.

(ii) Bestimmen Sie $\partial f : \mathbb{R}^d \to 2^{\mathbb{R}^d}$ für die Funktion $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, definiert durch $f(x) := \max\{3x_1, 0\}$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$.

(iii) Geben Sie ein Beispiel für eine Funktion $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, die nirgends subdifferenzierbar ist.