Aufgabe 1 (Äquivalente Bedingung für Minima) (5 Punkte)

Sei X ein Banach–Raum und $f : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ein nicht-triviales Funktional, d.h. es existiert ein $x_0 \in X$, sodass $f(x_0) < \infty$. Zeigen Sie, dass die folgenden Eigenschaften äquivalent sind:

(i) $f(x) = \inf_{y \in X} f(y)$.

(ii) $0 \in (\partial f)(x)$.

Bemerkung: Diese Aufgabe zeigt eine der wichtigsten Eigenschaften des Subdifferentials. Es liefert für allgemeine nicht-triviale Funktionale eine äquivalente Bedingung für Minima, wohingegen aus $(Df)(x) = 0$, wobei Df eine Gâteaux–Ableitung bezeichnet, im Allgemeinen nicht folgt, dass $f(x) = \inf_{y \in X} f(y)$, wenn $f : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ nicht zusätzlich konvex ist.

Aufgabe 2 (Grönwall'sche Ungleichung) (5 Punkte)

Sei $I := (a, b)$, $-\infty < a < b < \infty$, $y \in C^0(\overline{I}) \cap C^1(I)$ und $\beta \in C^0(\overline{I})$ so, dass für alle $t \in I$

$$y'(t) \leq \beta(t)y(t).$$

Zeigen Sie, dass für alle $t \in I$

$$y(t) \leq y(a) \exp\left(\int_a^t \beta(s)\, ds\right).$$

Tipp: Betrachten Sie $\tilde{y} \in C^0(\overline{I}) \cap C^1(I)$, definiert durch $\tilde{y}(t) := \exp(\int_a^t \beta(s)\, ds)$ für alle $t \in I$, und zeigen Sie, dass $(t \mapsto y(t)/\tilde{y}(t)) \in C^1(I)$ monoton fallend ist.

Aufgabe 3 (Asymptotisches Verhalten der Wärmeleitungsgleichung) (5 Punkte)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, offen und beschränkt, $I := (0, T)$, $0 < T < \infty$, $f \in L^2(\Omega)$ und $u \in C^1(\overline{I}, W_0^{1,2}(\Omega))$ eine eindeutige Lösung der instationären Wärmeleitungsgleichung für den Anfangswert $u_0 \in L^2(\Omega)$, d.h.

$$\begin{aligned}((\partial_t u)(t), v)_{L^2(\Omega)} + ((\nabla u)(t), \nabla v)_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)} &= (f, v)_{L^2(\Omega)} \qquad \text{für alle } t \in I, v \in W_0^{1,2}(\Omega),\\ u(0) &= u_0 \qquad \text{in } W_0^{1,2}(\Omega)\end{aligned}$$

Weiter sei $\tilde{u} \in W_0^{1,2}(\Omega)$ eine eindeutige Lösung der stationären Wärmeleitungsgleichung, d.h.

$$(\nabla \tilde{u}, \nabla v)_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)} = (f, v)_{L^2(\Omega)} \qquad \text{für alle } v \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

Zeigen Sie, dass für alle $t \in I$

$$\|u(t) - \tilde{u}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|u_0 - \tilde{u}\|_{L^2(\Omega)}^2 \exp(-2c_P^{-2}t),$$

gilt, d.h. für $t \to \infty$ konvergiert die instationäre Lösung gegen die stationäre Lösung. Hierbei bezeichnet $c_P > 0$ die Poincaré'sche Konstante, d.h. $\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq c_P \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}$ für alle $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$.

Tipp: Verwenden Sie Aufgabe 2.

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, ein beschränktes Gebiet und $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ für $p \in [1, \infty)$. Zeigen Sie, dass $u^+ := \max\{u, 0\} \in W_0^{1,p}(\Omega)$ mit

$$\nabla(u^+) = (\nabla u)\chi_{\{u>0\}} \quad \text{in } L^p(\Omega; \mathbb{R}^d).$$

Tipp: Benutzen Sie $u_\varepsilon := f_\varepsilon \circ u$, wobei $f_\varepsilon(r) := (r^2 + \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}} - \varepsilon$ für $r \geq 0$ und $f_\varepsilon(r) := 0$ für $r \leq 0$, für $\varepsilon \to 0$ und verwenden Sie Aufgabe 1 von Blatt 7.