

**Praktikum zu Theorie und Numerik nichtlinearer
partieller Differentialgleichungen**

PROJEKT 1 – FEM FÜR DIE POISSON-GLEICHUNG (WDH.)

Abgabe: per E-Mail bis Dienstag, den 09.11.2021, 12:00 Uhr

Wir betrachten die schwache Formulierung des Poisson-Problems in einem polygonalen Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ mit Nullrandwerten auf $\partial\Omega$, d. h. gesucht ist $u \in H_0^1(\Omega)$, sodass

$$(1) \quad \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx \quad \text{f. a. } v \in H_0^1(\Omega).$$

Das Problem (1) ist äquivalent zum Minimierungsproblem $\min_{u \in H_0^1(\Omega)} I[u]$ mit

$$(2) \quad I[u] = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx - \int_{\Omega} f u \, dx.$$

Zur Diskretisierung des Problems betrachten wir eine Triangulierung \mathcal{T}_h des Gebiets Ω bestehend aus Dreiecken mit maximaler Seitenlänge $h_{\max} \leq h$ und schränken das Problem ein auf den endlich-dimensionalen P_1 -FE-Teilraum $\mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}_h) = \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h) \cap H_0^1(\Omega)$, wobei

$$\mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h) = \{u_h \in C(\bar{\Omega}) : u_h|_T \in P^1(T) \text{ für alle } T \in \mathcal{T}_h\} \subset H^1(\Omega).$$

Zur Lösung des diskreten Minimierungsproblems eignen sich u. a. das implizite Gradientenverfahren

$$\frac{1}{\tau} \left((\nabla u_h^k, \nabla v_h) - (\nabla u_h^{k-1}, \nabla v_h) \right) = -\delta I[u_h^k; v_h] \text{ f. a. } v_h \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}_h),$$

sowie das Newton-Verfahren

$$\delta^2 I[u_h^{k-1}; v_h, u_h^k] = \delta^2 I[u_h^{k-1}; v_h, u_h^{k-1}] - \delta I[u_h^{k-1}; v_h] \text{ f. a. } v_h \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}_h).$$

Aufgaben:

- Laden Sie den MATLAB-Code zur Lösung des Poisson-Problems mittels P_1 -FEM von der Vorlesungshomepage herunter und machen Sie sich damit vertraut (oder schreiben Sie wahlweise einen eigenen P_1 -FEM-Code).
- Bestimmen Sie die experimentelle Konvergenzordnung in $L^2(\Omega)$ für ein (H^2 -reguläres) Problem mit bekannter Lösung.
- Implementieren Sie sowohl das Gradientenverfahren mit Schrittweite $\tau = h$ als auch das Newton-Verfahren zur approximativen Lösung des diskreten Problems. Verwenden Sie dabei in den Iterationen das Abbruchkriterium $\tau^{-1} \|\nabla u_h^k - \nabla u_h^{k-1}\| \leq \epsilon_{\text{stop}} = 10^{-3}$ (mit $\tau = 1$ im Fall des Newton-Verfahrens).
- Betrachten Sie nun in (2) anstelle des linearen Quellterms $\int_{\Omega} f u \, dx$ das nichtlineare Funktional $u \mapsto g[u] = \int_{\Omega} u^4 + f u \, dx$ und lösen Sie das entstehende Minimierungsproblem nun mit Hilfe des semi-impliziten Gradientenverfahrens mit der diskreten Flussfunktion

$$-\hat{\delta} I_h[u_h^k, u_h^{k-1}; v_h] = -(\nabla u_h^k, \nabla v_h)_{L^2(\Omega)} + \delta g[u_h^{k-1}; v_h].$$

Verwenden Sie dabei im expliziten Term die Quadratur $\int_{\Omega} \cdot \, dx = \int_{\Omega} \mathcal{I}_h[\cdot] \, dx$.

Homepage zur Vorlesung:

<https://aam.uni-freiburg.de/agru/lehre/ws21/nonlinPDE/>

Datum: 26.10.2021