Abteilung für
Angewandte Mathematik

WiSe 2021/2022

S. Bartels, M. Růžička, C. Palus, P. Tscherner

Praktikum zu Theorie und Numerik nichtlinearer partieller Differentialgleichungen

Projekt 2 – Zum Dahinschmelzen: Von der Wärmeleitungsgleichung zur Allen-Cahn-Gleichung

Abgabe: per E-Mail bis Dienstag, den 23.11.2021, 12:00 Uhr

Teil 1. (i) Laden Sie den Ordner `projekt2.zip` von der Website der Vorlesung herunter und machen Sie sich mit der Funktionsweise der Implementierung `p1_theta_heat.m` des θ-Mittelpunkt Schemas zur Wärmeleitungsgleichung

$$\partial_t u - \Delta u = f \text{ in } \Omega, \quad u(0) = u_0, \quad u|_{\Gamma_D} = \widetilde{u}_D|_{\Gamma_D}, \quad \partial_\eta u|_{\Gamma_N} = g$$

vertraut. Testen Sie das Programm auf Stabilität für Zeitschrittweiten $\tau = h^\alpha/20$ mit verschiedenen Parametern $\theta \in [0,1]$ und $\alpha, red \in \mathbb{N}$. Erstellen Sie eine Tabelle, in der Sie verzeichnen, unter welchen Bedingungen das Verfahren stabil ist und vergleichen Sie die Resultate mit denen aus der Vorlesung.
(ii) Betrachten Sie außerdem auf $\Omega = (0,1) \times (0,1)$ den Fall

$$\Gamma_N = \emptyset, \quad u_0 = 0, \quad \widetilde{u}_D|_{\Gamma_D} = 0, \quad g = 0$$

und implementieren Sie für die Lösung $u_t(x,y) = t(x(1-x)y(1-y))$ die zugehörige rechte Seite f. Berechnen Sie anschließend für $T = 10$, $\theta = 1/2$, $\tau = 1$ und $red = 1, \ldots, 7$ die Fehler

$$||\mathcal{I}_h(u_T) - u_h^K||_{L^2(\Omega)},$$

wobei u_h^K die letzte Iterierte bezeichnet. Bestimmen Sie die experimentelle Konvergenzordnung und vergleichen Sie diese mit Fehlerabschätzungen aus der Vorlesung.

Teil 2. Wir betrachten die Allen-Cahn-Gleichung

$$\partial_t u - \Delta u = -\epsilon^{-2} f(u), \qquad u(0) = u_0, \qquad \partial_\eta u(t,\cdot)|_{\partial\Omega} = 0,$$

für fast alle $t \in [0,T]$. Dabei sind $u_0 \in L^2(\Omega)$, $\epsilon > 0$ und $f(s) = s^3 - s$.
(i) Implementieren Sie das linearisierte, semi-implizite Euler-Verfahren, das in jedem Zeitschritt die Gleichung

$$(d_t u_h^k, v_h) + (\nabla u_h^k, \nabla v_h) + \varepsilon^{-2}\big(f'(u_h^{k-1})(u_h^k - u_h^{k-1}), v_h\big)_h = -\varepsilon^{-2}(f(u_h^{k-1}), v_h)_h$$

für alle $v_h \in S^1(\mathscr{T}_h)$ löst. Dabei bezeichnet

$$(v,w)_h = \int_\Omega \mathcal{I}_h(vw)\,\mathrm{d}x$$

das diskrete L^2-Skalarprodukt.
(ii) Verwenden Sie $\Omega = (-1,1)^2$, $u_0(x) = \tanh\big((|x| - 0.5)/(\sqrt{2}\varepsilon)\big)$ sowie $T = 10$ und testen Sie das Programm auf Stabilität. Setzen Sie dafür $\epsilon = 2^{-\ell}$ sowie die Zeitschrittweite $\tau = h^\alpha$ und experimentieren Sie mit verschiedenen Werten von h, ℓ und α. Erstellen Sie eine Tabelle, in der Sie verzeichnen, unter welchen Bedingungen das Verfahren stabil ist.
