Abteilung für
Angewandte Mathematik

WiSe 2021/2022

S. Bartels, M. Růžička, C. Palus, P. Tscherner

Praktikum zu Theorie und Numerik nichtlinearer partieller Differentialgleichungen

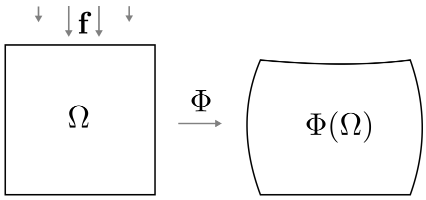
Projekt 3 – Das vektorwertige Poisson-Problem

Abgabe: per E-Mail bis Dienstag, den 07.12.2021, 12:00 Uhr

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$ und $\Gamma_{\mathrm{D}} \subset \partial\Omega$ mit positivem $(d-1)$-dimensionalen Hausdorff-Maß. Die linear-elastische Deformation $\Phi(x) = \mathrm{id} + \mathbf{u}(x)$ eines Körpers mit Referenzkonfiguration Ω unter Krafteinwirkung kann vereinfacht durch das vektorwertige Poisson-Problem beschrieben werden: Zu einer gegebenen Kraft $\mathbf{f}\colon \Omega \to \mathbb{R}^d$ und Dirichlet-Randbedingungen auf Γ_{D} sind Minimierer $u\colon \Omega \to \mathbb{R}^d$ des Funktionals

$$I[\mathbf{u}] = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla \mathbf{u}|^2 \,\mathrm{d}x - \int_\Omega \mathbf{f}\cdot\mathbf{u}\,\mathrm{d}x$$

gesucht.



Aufgaben:

- Erweitern Sie den Code zur Lösung des Poisson-Problems mittels P_1-FEM, sodass nun wahlweise das zwei- oder dreidimensionale Poisson-Problem gelöst wird. Verwenden Sie zur Lösung das implizite Gradientenverfahren
$$\frac{1}{\tau}\Big((\nabla \mathbf{u}_h^k, \nabla \mathbf{v}_h) - (\nabla \mathbf{u}_h^{k-1}, \nabla \mathbf{v}_h)\Big) = -\delta I[\mathbf{u}_h^k; \mathbf{v}_h] \text{ f. a. } \mathbf{v}_h \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}_h).$$
Stellen Sie die berechneten Deformationen graphisch dar. Dafür eignen sich beispielsweise die MatLab-Routinen `trisurf` ($d = 2$) und `tetramesh` ($d = 3$).
- Erweitern Sie den Code, sodass sich die (linear-elastische) Deformation eines beliebigen *isotropen* Materials mit *Lamé-Konstanten* $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mu > 0$ simulieren lässt. Solche Materialien werden durch die elastische Energie
$$I_{\lambda,\mu}[\mathbf{u}] = \mu\int_\Omega |\epsilon(u)|^2\,\mathrm{d}x + \frac{\lambda}{2}\int_\Omega (\operatorname{div}\mathbf{u})^2\,\mathrm{d}x - \int_\Omega \mathbf{f}\cdot\mathbf{u}\,\mathrm{d}x$$
mit dem symmetrischen Gradienten $\epsilon(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^\top)$ modelliert. Lösen Sie das diskretisierte Problem dabei direkt mit dem \-Operator und berechnen Sie die experimentellen Konvergenzordnungen für ein Problem mit bekannter Lösung sowohl im Fall $\mu = 1, \lambda = 1$ als auch im Fall $\mu = 1, \lambda = 1000$.
