Abteilung für
Angewandte Mathematik

WiSe 2021/2022
S. Bartels, M. Růžička, C. Palus, P. Tscherner

Praktikum zu Theorie und Numerik nichtlinearer partieller Differentialgleichungen

Projekt 5 – Die p-Laplace-Gleichung

Abgabe: per E-Mail bis Dienstag, den 25.01.2022, 12:00 Uhr

Sei $p \in (1, \infty)$. Wir suchen in einem beschränkten Gebiet $\text{🌲} \subset \mathbb{R}^2$ eine Lösung $u \in W^{1,p}(\text{🌲})$ der p-Laplace-Gleichung

$$\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = f \text{ in } \text{🌲}, \qquad u = 0 \text{ auf } \partial\text{🌲}.$$

Ein äquivalentes Problem ist die Minimierung des zugehörigen Energiefunktionals

$$I[u] = \frac{1}{p}\int_{\text{🌲}} |\nabla u|^p \,\mathrm{d}x - \int_{\text{🌲}} f u \,\mathrm{d}x$$

in $W_0^{1,p}(\text{🌲})$. Die Ableitungen des Energiefunktionals sind gegeben durch

$$\delta I[u; v] = \int_{\text{🌲}} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x - \int_{\text{🌲}} f v \,\mathrm{d}x,$$

$$\delta^2 I[u; v, w] = (p-2)\int_{\text{🌲}} |\nabla u|^{p-4}(\nabla u \cdot \nabla v)(\nabla u \cdot \nabla w)\,\mathrm{d}x + \int_{\text{🌲}} |\nabla u|^{p-2}\nabla w \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x.$$

Aufgaben:

- Implementieren Sie das Newton-Verfahren $u_h^k = u_h^{k-1} + \tau^k d_h^k$ mit Schrittweiten $\tau^k > 0$ und $d_h^k \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}_h)$, sodass
$$\delta^2 I[u_h^{k-1}; v_h, d_h^k] = -\delta I[u_h^{k-1}; v_h] \quad \text{für alle } v_h \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}_h),$$
zur approximativen Lösung des obigen Minimierungsproblems. Achten Sie darauf, dass der Startwert $u_h^0 \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}_h)$ nicht konstant ist. Bestimmen Sie die Schrittweiten τ^k in jedem Iterationsschritt mit dem folgenden Liniensuchverfahren:
  (1) Setze $\tau_0^k = 1$ und $\text{❄} = 0$.
  (2) Falls $I[u_h^{k-1} + \tau_{\text{❄}}^k d_h^k] < I[u_h^{k-1}]$, verwende $\tau^k = \tau_{\text{❄}}^k$ und stoppe.
  (3) Erhöhe ❄ um 1, setze $\tau_{\text{❄}}^k = (1/2)\tau_{\text{❄}-1}^k$ und gehe zu (2).
- Wie unterscheiden sich die Lösungen in den Fällen $p < 2$ und $p > 2$? Wirkt sich p auf die Anzahl der Schritte im Newton-Verfahren aus? Experimentieren Sie auch mit anderen Randwerten ungleich 0 und verschiedenen Quelltermen f. Welche qualitativen Eigenschaften der (numerischen) Lösungen sind für sehr große bzw. sehr kleine Werte von p erkennbar?

Motivation: Der p-Laplace-Operator ist definiert durch $\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$. Anwendungen finden sich beispielsweise beim *Entrauschen* von Bildern. Beschreibt die Funktion u die Helligkeits- oder RGB-Werte einer Fotografie, so leisten Rausch-Artefakte, die unter anderem beim Fotografieren mit hohen ISO-Werten bei schlechten Lichtverhältnissen auftreten, einen Beitrag zur Größe $|\nabla u|^p$. Numerisch ist der Fall $p = 2$ einfach zu handhaben. Jedoch bestraft der Term $\int |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x$ nicht nur unerwünschtes Bildrauschen, sondern jede Kante eines Bildes, und man erhält im Ergebnis zwar ein weniger verrauschtes, aber dafür stark weichgezeichnetes Bild. Im Grenzwert $p \to 1$ bleiben zwar Kanten erhalten, die Konvexität des Energiefunktionals aber leider nicht. Dies führt auf das Problem der TV-Minimierung (Blatt 6).
Der andere Extremfall, $p \gg 2$, kann verwendet werden um anwachsende oder kollabierende Haufen beispielsweise aus Sand oder Mahlgut zu modellieren.

Datum: 21.12.2021

FROHE WEIHNACHTEN UND EINEN GUTEN START INS NEUE JAHR!