Abteilung für
Angewandte Mathematik

WiSe 2021/2022

S. Bartels, M. Růžička, C. Palus, P. Tscherner

Praktikum zu Theorie und Numerik nichtlinearer partieller Differentialgleichungen

Projekt 6 – Minimieren der Totalvariation und das Entrauschen von Bildern

Abgabe: per E-Mail bis Dienstag, den 08.02.2022, 12:00 Uhr

Die Minimierung der Totalvariation

$$|Du|(\Omega) = \sup\left\{ -\int_\Omega u \operatorname{div} \phi \, \mathrm{dx} \;\middle|\; \phi \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^n),\ ||\phi||_{L^\infty(\Omega)} \le 1 \right\}$$

kann zum Entrauschen von Bildern verwendet werden. Wir betrachten eine regularisierte Behandlung des Funktionals

$$I(u) = |Du|(\Omega) + \frac{\alpha}{2}||u-g||^2 \,,$$

mit $\alpha > 0$ und $g \in L^2(\Omega)$. Das regularisierte Funktional ist definiert als

$$I_\delta(u) = \int_\Omega |\nabla u|_\delta \, \mathrm{dx} + \frac{\alpha}{2}||u-g||^2 \,,$$

wobei $u \in W^{1,1}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ und $|p|_\delta = (|p|^2 + \delta^2)^{1/2}$ für alle $p \in \mathbb{R}^d$ und $\delta > 0$. Wir definieren folgenden semi-impliziten Gradientenfluss:

Algorithmus Für $\delta > 0$, $\tau > 0$ und $u_h^0 \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h)$ berechne die Folge $(u_h^k)_k$ durch Lösen von

$$(d_t u_h^k, v_h) + (|\nabla u_h^{k-1}|_\delta^{-1} \nabla u_h^k, \nabla v_h) = -\alpha(u_h^k - g, v_h)$$

für alle $v_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h)$. Stoppe, falls $||d_t u_h^k|| \le \varepsilon_{\text{stop}}$.

Aufgaben (i) Laden Sie den Ordner `projekt6.zip` von der Website der Vorlesung herunter und machen Sie sich mit der Implementierung `tv_reg_regularized.m` des obigen Algorithmus vertraut. Ziel ist es, die Bilddatei `bw_noisy.pgm` (GIMP) zu entrauschen. Die Datei enthält nach den ersten vier Zeilen die Grauwerte ($0-255$, $0 =$ schwarz, $255 =$ weiß) eines jeden Pixels zeilenweise von links oben nach rechts unten sortiert (die erste 255 gehört nicht dazu!). Die 65×65 Pixel können durch sechs Verfeinerungen von `triang_cube(2)` mit den Knoten `c4n` der resultierenden Triangulierung identifiziert werden. Lesen Sie die Datei in MatLab ein und verwenden Sie die Grauwerte (umsortiert in einer Reihenfolge passend zum Gitter `c4n`) für die Startkonfiguration u_h^0 und für g. Wenden Sie den Algorithmus darauf an und speichern Sie die gerundeten Werte wieder in einer `.pgm` Datei mit entsprechendem Aufbau.

(ii) Vergleichen Sie für verschiedene Werte α, $\tau = \frac{1}{10}h, \frac{1}{10}h^{1/2}, \frac{1}{10}h^{1/4}$ und $\delta = h, h^{1/2}, h^{1/4}$ die resultierenden Bilder sowie die Anzahl der benötigten Iterationsschritte. Für welche Parameter lässt sich mit möglichst wenig Iterationsschritten ein gutes Resultat erzielen?
