Einführung Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen
Übungsblatt 1

WS 2022/23

Prof. Dr. M. Růžička, Dr. A. Kaltenbach **Abgabetermin:** 24. Oktober 2022

Aufgabe 1 (2.5 Punkte)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ offen und seien $\mathbf{u}, \mathbf{v} \colon \Omega \to \mathbb{R}^3$ und $w \colon \Omega \to \mathbb{R}$ hinreichend oft differenzierbar. Zeigen Sie die folgenden Identitäten:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \nabla w &= \Delta w\,, & \operatorname{div}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) &= \mathbf{v} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{u} - \mathbf{u} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{v}\,, \\ \operatorname{rot} \nabla w &= 0\,, & \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u} &= \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} - \Delta \mathbf{u}\,, \\ \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{u} &= 0\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 2 (6.5 Punkte)

Gegeben sei das Vektorfeld $\mathbf{u} \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definiert durch

$$\mathbf{u}(x) := (x_1, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3)^\top$$

für alle $x = (x_1, x_2, x_3)^\top \in \mathbb{R}^3$, und das Kugelsegment $G := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| < 2\,, x_1 > 1\}$. Bezeichne $\nu \colon \partial G \to \mathbb{R}^3$ die äußere Normale an G. Berechnen Sie das Oberflächenintegral

$$\int_{\partial G} \mathbf{u}(s) \cdot \nu(s)\,\mathrm{d}s$$

(a) gemäß der Definition des Oberflächenintegrals.

Tipp: Nutzen Sie, dass $\partial G = F_1 \cup F_2$, wobei

$$\begin{aligned} F_1 &= \{x = (x_1, x_2, x_3)^\top \in \mathbb{R}^3 \mid |x| = 2, x_1 \geq 1\}\,, \\ F_2 &= \{x = (1, x_2, x_3)^\top \in \mathbb{R}^3 \mid x_2^2 + x_3^2 \leq 3\}\,, \end{aligned}$$

sowie die zwei Parametrisierungen $f_1 \colon \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right) \times (0, 2\pi) \to F_1$, definiert durch $f_1(\psi, \varphi) := (2\sin\psi, 2\cos\psi\sin\varphi, 2\cos\psi\cos\varphi)^\top$ für alle $(r, \varphi)^\top \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right) \times (0, 2\pi)$, und $f_2 \colon (0, \sqrt{3}) \times (0, 2\pi) \to F_2$, definiert durch $f_2(r, \varphi) := (1, r\sin\varphi, r\cos\varphi)^\top$ für alle $(r, \varphi)^\top \in (0, \sqrt{3}) \times (0, 2\pi)$.

(b) mit Hilfe des Gauß'schen Integralsatzes.

Aufgabe 3 (Fundamentallemma der Variationsrechnung) (5 Punkte)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, ein offenes Gebiet. Sei $u \in C^0(\Omega)$ derart, dass für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ gilt

$$\int_\Omega u\,\varphi\,\mathrm{d}x = 0\,.$$

Zeigen Sie, dass dann $u = 0$ auf Ω gilt.

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, ein beschränktes Gebiet, $p \in (1, \infty)$ und $f \in C^0(\overline{\Omega})$. Wir definieren $I : C^2(\overline{\Omega}) \to \mathbb{R}$ für alle $u \in C^2(\overline{\Omega})$ durch

$$I(u) := \frac{1}{p} \int_\Omega |(\nabla u)(x)|^p\,\mathrm{d}x - \int_\Omega f(x)\,u(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Berechnen Sie die erste Variation $\delta I(u, h)$ für $h \in C^\infty(\overline{\Omega})$ mit $h = 0$ auf $\partial\Omega$ und bestimmen Sie die zugehörige Differentialgleichung für den Minimierer.