Einführung Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen
Übungsblatt 10 WS 2022/23
Prof. Dr. M. Růžička, Dr. A. Kaltenbach **Abgabetermin:** 9. Januar 2023

Aufgabe 1 (Scott–Zhang-Interpolationsoperator in einer Dimension) (10 Punkte)

Seien $G = (0,1) \subset \mathbb{R}$ und $N \in \mathbb{N}$. Definiere $x_j := j/N$ für alle $j \in \{0,\dots,N\}$, $h := 1/N$ sowie $I_j := (x_{j-1}, x_j)$ für alle $j \in \{1,\dots,N\}$. Ferner sei

$$X_h := \{v \in C^0(\overline{G}) \mid v|_{I_j} \in \mathbb{P}_1(I_j) \text{ für } j = 1,\dots,N\}$$

und $(\varphi_0,\dots,\varphi_N)$ die Knotenbasis von X_h, d.h. $\varphi_j \in X_h$ und $\varphi_j(x_k) = \delta_{jk}$ für $j,k \in \{0,\dots,N\}$. Für jedes $j \in \{1,\dots,N\}$ ist $X_h|_{I_j} = \mathbb{P}_1(I_j)$ mit dem L^2-Skalarprodukt ein zweidimensionaler Hilbertraum. Mit $\varphi_{j,1} = \varphi_j|_{I_j}$ und $\varphi_{j,2} = \varphi_{j-1}|_{I_j}$ ist $(\varphi_{j,1}, \varphi_{j,2})$ eine Basis von $X_h|_{I_j}$. Es existiert eine duale Basis $(\psi_{j,1}, \psi_{j,2})$ in $X_h|_{I_j}$, sodass

$$\int_{I_j} \varphi_{j,l}(x)\psi_{j,k}(x)\,\mathrm{d}x = \delta_{lk}\,, \quad k,l \in \{1,2\}\,.$$

Für $u \in L^1(G)$ definieren wir nun die Interpolierende $\Pi_h u \in X_h$ durch

$$\Pi_h u := \sum_{j=0}^{N} \varphi_j \int_{I_j} \psi_{j,1}(y)u(y)\,\mathrm{d}y\,.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\Pi_h : L^1(G) \to X_h$ wohldefiniert, linear und stetig ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\Pi_h u_h = u_h$ für alle $u_h \in X_h$ gilt.

(c) Für $j \in \{1,\dots,N\}$ sei $S_j := I_{j-1} \cup I_j \cup I_{j+1}$, wobei $I_0 := I_{N+1} = \emptyset$. Zeigen Sie, dass ein $c > 0$ existiert, das von u, j und N unabhängig ist, sodass für alle $u \in L^1(G)$ und $j \in \{1,\dots,N\}$ gilt

$$\int_{I_j} |\Pi_h u|\,dx + \int_{I_j} h\,|(\Pi_h u)'|\,\mathrm{d}x \le c \int_{S_j} |u|\,\mathrm{d}x\,.$$

Aufgabe 2 (Projektion von $L^2(\Omega)$ nach $\mathbb{R}$) (2 Punkte)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, ein beschränktes Gebiet und $u \in L^2(\Omega)$. Zeigen Sie, dass

$$\inf_{c\in\mathbb{R}} \|u - c\|_{L^2(\Omega)} = \left\| u - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u\,\mathrm{d}x \right\|_{L^2(\Omega)}\,.$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, ein offenes, beschränktes Gebiet mit polygonalem Rand, $a \in C^0(\overline{\Omega})$ mit $a > 0$ in Ω und $f \in L^2(\Omega)$. Außerdem sei $\mathcal{T}_h$ eine zulässige Triangulierung von Ω und $X_h = \{v_h \in C^0(\overline{\Omega}) \mid v_h|_T \in \mathbb{P}_1(T) \text{ für alle } T \in \mathcal{T}_h\}$.

(a) Zeigen Sie, dass eine schwache Lösung $u \in \mathring{H}^1(\Omega)$ von

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(a\,\nabla u) &= f && \text{in } \Omega\,,\\ u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega\,, \end{aligned}$$

existiert. Wie sieht die schwache Formulierung aus?

(b) Sei $u_h \in X_h \cap \mathring{H}^1(\Omega)$ die diskrete Lösung des Problems aus (a). Zeigen Sie, dass eine Funktion $\overline{a} : \Omega \to \mathbb{R}$ existiert, die auf jedem $T \in \mathcal{T}_h$ konstant ist und

$$\int_\Omega \overline{a}\, \nabla u_h \nabla \varphi_h \,\mathrm{d}x = \int_\Omega f\, \varphi_h \,\mathrm{d}x$$

für alle $\varphi_h \in X_h \cap \mathring{H}^1(\Omega)$ erfüllt.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, ein offenes, beschränktes Normalgebiet, $a \in \mathbb{R}^n$ und $f \in L^2(\Omega)$. Außerdem sei $u \in H^1(\Omega)$ so, dass für alle $\varphi \in H^1(\Omega)$ gilt

$$\int\limits_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \,\mathrm{d}x + \int\limits_\Omega a\, u\, \varphi \,\mathrm{d}x = \int\limits_\Omega f\, \varphi \,\mathrm{d}x\,.$$

Formulieren Sie das zugehörige klassische Problem inklusive der vorzugebenden Randbedingungen.

Aufgabe 5 (Projektionssatz) (14 Bonuspunkte)

Sei A ein nichtleerer, abgeschlossener Teilraum eines Hilbertraums $(H, (\cdot,\cdot))$. Mit $A^\perp$ bezeichnen wir das orthogonale Komplement von A, d.h. $A^\perp = \{x \in H \mid x \perp A\}$. Dabei drückt $x \perp A$ aus, dass $(x, a) = 0$ für alle $a \in A$.

(a) Zeigen Sie, dass $A^\perp$ ein abgeschlossener Unterraum von H ist.

(b) Wir definieren die orthogonale Projektion $P\colon H \to A$, für alle $x \in H$ durch die Bedingung

$$\|x - Px\| = \min_{y \in A} \|x - y\|\,.$$

Zeigen Sie, dass $P\colon H \to A$ wohldefiniert ist, d.h. dass für alle $x \in H$ genau ein $Px \in A$ existiert, das die obige Bedingung erfüllt.

Tipp: Wenden Sie das Dirichletsche Prinzip auf ein geeignetes Funktional an.

(c) Zeigen Sie, dass $x - Px \perp A$, d.h. $(Px, y) = (x, y)$ für alle $y \in A$, gilt.

(d) Zeigen Sie, dass $P\colon H \to A$ linear und stetig ist und $\|P\|_{L(H,H)} = 1$ für $A \neq \{0\}$.

(e) Zeigen Sie, dass es zu jedem $x \in H$ genau eine Darstellung $x = y + z$ existiert mit $y \in A$ und $z \in A^\perp$.

Aufgabe 7 (6 Bonuspunkte)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, offen und beschränkt. Zeigen Sie, dass der Hölderraum $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, $\alpha \in (0, 1]$, ein Banachraum ist.

Wir wünschen Ihnen frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins neue Jahr!