Einführung Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen
Übungsblatt 11 WS 2022/23

Prof. Dr. M. Růžička, Dr. A. Kaltenbach **Abgabetermin:** 16. Januar 2023

Aufgabe 1 (Scott–Zhang-Interpolationsoperator in einer Dimension, Teil II) (12 Punkte)

Wir übernehmen die Notation aus Aufgabe 1 auf Blatt 10. Sei $1 \leq p < \infty$. Zeigen Sie, dass eine Konstante $c > 0$ existiert, sodass die folgenden Aussagen gelten:

(a) Für alle $u \in L^1(G)$ und $j \in \{1, \dots, N\}$ gilt, dass

$$\|\Pi_h u\|_{L^\infty(I_j)} \leq c \fint_{I_j} |\Pi_h u(x)| \, \mathrm{d}x \,.$$

(b) Für alle $u \in L^p(G)$ gilt, dass

$$\|\Pi_h u\|_{L^p(G)} \leq c \, \|u\|_{L^p(G)} \,.$$

Tipp: Verwenden Sie (a), Aufgabe 1 (c) von Blatt 10 und die Jensen–Ungleichung.

(c) Für alle $u \in L^p(G)$ gilt, dass

$$\|\Pi_h u - u\|_{L^p(G)} \leq c \inf_{w \in X_h} \|u - w\|_{L^p(G)} \,.$$

Tipp: Aufgabe 1 (b) von Blatt 10.

(d) Für alle $u \in H^{1,p}(G)$ gilt, dass

$$\|(\Pi_h u - u)'\|_{L^p(G)} \leq c \inf_{w \in X_h} \|(u - w)'\|_{L^p(G)} \,.$$

Tipp: Zeigen Sie zunächst, dass

$$\int_{I_j} |(\Pi_h u)'| \, \mathrm{d}x \leq c_1 h^{-1} \int_{S_j} \left| u(x) - \fint_{S_j} u(y) \, \mathrm{d}y \right| \mathrm{d}x \leq c_2 \int_{S_j} |u'| \, \mathrm{d}x \,.$$

(e) Für alle $u \in H^{1,p}(G)$ gilt, dass

$$\|\Pi_h u - u\|_{L^p(G)} \leq c \, h \, \|u'\|_{L^p(G)} \,.$$

Aufgabe 2 (Biharmonische Gleichung) (5 Punkte)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, ein beschränktes Gebiet und sei $f \in H^{-2}(\Omega) := (\mathring{H}^2(\Omega))^*$. Der Bilaplace $\Delta^2 : H^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ ist für alle $u \in H^2(\Omega)$ durch $\Delta^2 u = \Delta(\Delta u)$ definiert. Eine Funktion $u \in \mathring{H}^2(\Omega)$ heißt schwache Lösung des Randwertproblems für die biharmonische Gleichung

$$\begin{aligned} \Delta^2 u &= f && \text{in } \Omega \,, \\ u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega \,, \\ \tfrac{\partial u}{\partial \nu} &= 0 && \text{auf } \partial\Omega \,, \end{aligned} \tag{1}$$

falls für alle $\varphi \in \mathring{H}^2(\Omega)$ gilt, dass

$$\int_\Omega \Delta u \Delta \varphi \, \mathrm{d}x = \langle f, \varphi \rangle \,.$$

Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Lax-Milgram, dass (1) genau eine schwache Lösung hat.

Tipp: Zeigen Sie, dass $\int_\Omega (\Delta v)^2 \,\mathrm{d}x = \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega (\partial_i \partial_j v)^2 \,\mathrm{d}x$ für alle $v \in C_0^\infty(\Omega)$ und verwenden Sie (ohne Beweis), dass

$$\mathring{H}^2(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H^2(\Omega)}}.$$

Aufgabe 3 (Korn–Ungleichung) (3 Punkte)

Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, ein Gebiet. Zeigen Sie, dass eine Konstante $c > 0$ existiert, sodass für alle Vektorfelder $u \in \mathring{H}^1(G, \mathbb{R}^n)$ gilt

$$\int_G |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x \le c \int_G \left| \frac{\nabla u + (\nabla u)^\top}{2} \right|^2 \,\mathrm{d}x\,.$$