Einführung Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen
Übungsblatt 12 — WS 2022/23

Prof. Dr. M. Růžička, Dr. A. Kaltenbach — **Abgabetermin:** 23. Januar 2023

Aufgabe 1 (Das Stokes–System) (6 Punkte)

Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand. Weiter seien $\mathbf{u} \in C^2(\overline{G}, \mathbb{R}^n) \cap \mathring{H}^1(G, \mathbb{R}^n)$ und $p \in C^1(\overline{G})$ eine Lösung des Stokes–Systems

$$\begin{aligned} -\Delta \mathbf{u} + \nabla p &= f && \text{in } G\,,\\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0 && \text{in } G\,,\\ \mathbf{u} &= \mathbf{0} && \text{auf } \partial G\,, \end{aligned}$$

zu gegebener rechter Seite $\mathbf{f} \in C^0(\overline{G}, \mathbb{R}^n)$. Ferner sei

$$X := \big\{ \mathbf{v} \in \mathring{H}^1(G, \mathbb{R}^n) \mid \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \text{ f.ü. in } G \big\}\,.$$

Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen gelten:

(a) Das Vektorfeld $\mathbf{u} \in C^2(\overline{G}, \mathbb{R}^n) \cap \mathring{H}^1(G, \mathbb{R}^n)$ ist eine schwache Lösung des Stokes–Systems, d.h. $\mathbf{u} \in X$ erfüllt für alle $\boldsymbol{\varphi} \in X$

$$\int_G \nabla \mathbf{u} : \nabla \boldsymbol{\varphi} \,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^n \int_G \mathbf{f}\, \boldsymbol{\varphi} \,\mathrm{d}x\,,$$

wobei das Frobenius–Skalarprodukt zwischen zwei Matrizen $\mathbf{A} = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}, \mathbf{B} = (b_{ij})_{i,j=1,\dots,n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ durch $\mathbf{A} : \mathbf{B} := \sum_{i,j=1}^n a_{ij} b_{ij}$ definiert ist.

(b) Der Raum X ist ein abgeschlossener Teilraum von $\mathring{H}^1(G, \mathbb{R}^n)$.

(c) Zu jedem $\mathbf{f} \in L^2(G, \mathbb{R}^n)$ existiert eine eindeutige schwache Lösung $\mathbf{u} \in X$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, ein Normalgebiet. Zeigen Sie, dass für jedes $u \in \mathring{H}^1(G)$ und $i \in \{1, \dots, n\}$ gilt, dass

$$\int_G \partial_i u \, u \,\mathrm{d}x = 0\,.$$

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, ein beschränktes Normalgebiet. Betrachten Sie das Randwertproblem

$$\begin{aligned} -\Delta u + \beta \cdot \nabla u &= f && \text{in } G\,,\\ u &= 0 && \text{auf } \partial G\,, \end{aligned}$$

zu gegebener rechter Seite $f \in L^2(G)$ und $\beta \in \mathbb{R}^n$. Finden eine sinnvolle schwache Formulierung und weisen Sie Existenz und Eindeutigkeit einer schwachen Lösung nach.

Tipp: Verwenden Sie den Satz von Lax–Milgram und Aufgabe 2.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei H ein Hilbertraum. Zeigen Sie, dass für jedes $x \in H$ gilt, dass

$$\|x\| = \max_{\|y\|=1} \,(x, y)\,.$$