Einführung Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen, Übungsblatt 2

WS 2022/23

Prof. Dr. M. Růžička, Dr. A. Kaltenbach **Abgabetermin:** 31. Oktober 2022

Aufgabe 1 (7 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Funktion $\Phi\colon \overline{G} \times G \to \mathbb{R}$, wobei $G := \{x = (x_1, x_2, x_3)^\top \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 > 0,\, x_2 > 0\}$, für alle $(y, x)^\top \in \overline{G} \times G$ definiert durch

$$\Phi(y,x) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{|y-x|} - \frac{1}{|f_1(y)-x|} + \frac{1}{|f_2(y)-x|} - \frac{1}{|f_3(y)-x|}\right),$$

wobei

$$\begin{aligned} y &= (y_1, y_2, y_3)^\top\,, \\ f_1(y) &= (-y_1, y_2, y_3)^\top\,, \\ f_2(y) &= (-y_1, -y_2, y_3)^\top\,, \\ f_3(y) &= (y_1, -y_2, y_3)^\top\,, \end{aligned}$$

eine Green'sche Funktion für das Gebiet G ist.

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, ein beschränktes Normalgebiet und $f \in C^2(\overline{\Omega})$ harmonisch auf Ω, d.h. $-\Delta f = 0$ auf Ω. Es gelte außerdem $f|_{\partial\Omega} = 0$. Zeigen Sie mit Hilfe der Green'schen Formeln, dass

$$f = 0 \quad \text{auf } \Omega\,.$$

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Sei $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ ein beschränktes Intervall und seien $A, B \in \mathbb{R}$.

(a) Finden Sie eine Funktion $u \in C^2(a, b) \cap C^0[a, b]$, sodass

$$\begin{aligned} u'' &= 0 \quad \text{in } (a,b)\,, \\ u(a) &= A\,, \\ u(b) &= B\,. \end{aligned} \tag{$*$}$$

(b) Zeigen Sie, dass jede Funktion mit den Eigenschaften aus $(*)$ sowohl ihr Minimum als auch ihr Maximum auf dem Rand von (a, b) annimmt.

(c) Folgern Sie, dass genau eine Funktion mit den Eigenschaften aus $(*)$ existiert.

(d) Zeigen Sie, dass die Lösung von $(*)$ die Mittelwerteigenschaft besitzt, d.h. dass für alle $x_0 \in (a, b)$ und alle $\varepsilon > 0$ mit $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subseteq (a, b)$ gilt

$$u(x_0) = \frac{1}{2\varepsilon}\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} u(y)\,\mathrm{d}y\,.$$

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Sei $c \in \mathbb{R}$. Finden Sie allgemeine Lösungen $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der gewöhnlichen Differentialgleichung $h''(t) = c\,h(t)$ für die drei Fälle $c < 0$, $c = 0$ und $c > 0$. Denken Sie dabei auch an Linearkombinationen von Lösungen.