Einführung Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen, Übungsblatt 3

WS 2022/23

Prof. Dr. M. Růžička, Dr. A. Kaltenbach

Abgabetermin: 07. November 2023

Aufgabe 1 (7 Punkte)

Sei $G := (0,\pi)^2$ und $\varphi \in C^0(\partial G)$. Der Rand ∂G lässt sich wie folgt aufschreiben:

$$\begin{aligned}\partial G &= \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4\\ &:= (\{0\} \times [0,\pi]) \cup (\{\pi\} \times [0,\pi]) \cup ((0,\pi) \times \{0\}) \cup ((0,\pi) \times \{\pi\})\,.\end{aligned}$$

Das Ziel dieser Aufgabe ist, eine Lösung $u \in C^2(G) \cap C^0(\overline{G})$ der Gleichung

$$-\Delta u = 0 \quad \text{in } G\,, \tag{1}$$

$$u = \varphi \quad \text{auf } \partial G\,, \tag{2}$$

zu finden. Wir erreichen dies in folgenden Schritten:

(a) Setzen Sie voraus, dass $u \in C^2(G) \cap C^0(\overline{G})$ die Gleichung (1) und $u(x,y) \neq 0$ für alle $(x,y)^\top \in G'$, wobei $G' \subseteq G$ nicht-leer ist, erfüllt und die Form

$$u(x,y) = f(x)g(y) \tag{3}$$

für alle $(x,y)^\top \in G'$ hat. Zeigen Sie, dass ein $c \in \mathbb{R}$ existiert, sodass

$$\frac{f''(x)}{f(x)} = -\frac{g''(y)}{g(y)} = c$$

für alle $(x,y)^\top \in G'$ gilt.

(b) Leiten Sie Funktionen $u : G \to \mathbb{R}$ der Form (3) her, die (1) erfüllen.

Tipp: Unterscheiden Sie die Fälle $c > 0$, $c = 0$ und $c < 0$ in (a) und nutzen Sie Aufgabe 4 vom Übungsblatt 2.

(c) Sei $w \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ definiert durch $w(x,y) := Ax + By + Cxy + D$ für alle $(x,y)^\top \in \mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie Koeffizienten $A, B, C, D \in \mathbb{R}$, sodass $w(x,y) = \varphi(x,y)$ für alle Eckpunkte $(x,y)^\top \in \{(0,0)^\top, (\pi,0)^\top, (0,\pi)^\top, (\pi,\pi)^\top\}$ gilt. Beachten Sie, dass $w \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ in G harmonisch ist.

(d) Sei $\varphi \in C^0(\partial G)$ so, dass $\varphi|_{\Gamma_i} \equiv 0$ für alle $i \in \{2,3,4\}$ ist. Zeigen Sie, dass reelle Koeffizienten $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existieren, sodass für fast alle $y \in [0,\pi]$ gilt

$$\varphi(0,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(ny)\,,$$

d.h. die Funktion $\varphi(0,\cdot)$ ist durch eine Sinus-Fourierreihe darstellbar.

Tipp: Für jede Funktion $\psi \in L^2(0,\pi)$ konvergiert ihre Fourierreihe fast überall in $(0,\pi)$ gegen ψ.

(e) Seien $\varphi \in C^0(\partial G)$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wie in (d). Bestimmen Sie Koeffizienten $a_n, b_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, so dass die Funktion

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n e^{nx} + b_n e^{-nx}) c_n \sin(ny)\,,$$

die Gleichung (1) mit der Randbedingung (2) erfüllt.

Tipp: Um (1) zu zeigen, dürfen Sie ohne Begründung die unendliche Summe und die Ableitung vertauschen. Man kann rigoros zeigen, dass dieser Schritt zulässig ist.

(f) Ähnlich wie in (e) kann man eine Lösung von (1) und (2) finden, falls $\varphi \in C^0(\partial G)$ die Bedingung $\operatorname{supp}\varphi \subset \overline{\Gamma_i}$ mit $i \in \{2,3,4\}$ erfüllt. Zeigen Sie mit Hilfe der vorherigen Ergebnisse, wie man eine Lösung von (1) mit (2) für ein allgemeines $\varphi \in C^0(\partial G)$ findet.

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, ein Gebiet und $u \in C^0(\Omega)$, so dass für alle Bälle $B = B_r^n(x) \subset\subset \Omega$ gilt

$$u(x) = \frac{1}{\mathscr{H}^{n-1}(\partial B)} \int_{\partial B} u(y)\,\mathrm{d}o(y)\,.$$

Zeigen Sie, dass $u \in C^2(\Omega)$ in Ω harmonisch ist.

Tipp: Bezeichne $\omega \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, für alle $x \in \mathbb{R}^n$ definiert durch

$$\omega(x) := \begin{cases} c_0 \exp(\frac{-1}{1-|x|^2}) & \text{falls } |x| < 1 \\ 0 & \text{falls } |x| \geq 1 \end{cases},$$

den Gauß'schen Glättungskern, wobei $c_0 > 0$ so gewählt ist, dass $\int_{\mathbb{R}^n} \omega(x)\,\mathrm{d}x = 1$. Definiere weiter $(\omega_h)_{h>0} \subseteq C^\infty(\mathbb{R}^n)$ für alle $h > 0$ und $x \in \mathbb{R}^n$ durch $\omega_h(x) := \frac{1}{h^n}\omega(\frac{x}{h})$. Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}^n$ mit $\operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > h$ gilt, dass

$$u(x) = (u * \omega_h)(x) := \int_\Omega \omega_h(x-y) u(y)\,\mathrm{d}y\,.$$

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, ein beschränktes Gebiet und sei $u \in C^2(G)$ in G harmonisch.

(a) Zeigen Sie, dass für alle Bälle $B = B_r^n(x) \subset\subset G$ gilt, dass

$$|(\nabla u)(x)| \leq \frac{n}{r} \sup_{y\in\partial B} |u(y)|\,.$$

Tipp: Zeigen Sie, dass für alle $i = 1, \ldots, n$ die Funktion $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in C^2(G)$ in G harmonisch ist und deshalb die Mittelwertgleichungen erfüllt.

(b) Sei $G' \subset\subset G$. Zeigen Sie, dass für alle Multiindizes $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| = \sum_{j=1}^{i} \alpha_j$ gilt, dass

$$\sup_{y\in G'} |(\partial^\alpha u)(y)| \leq \left(\frac{n|\alpha|}{\operatorname{dist}(G', \partial G)}\right)^{|\alpha|} \sup_{y\in G} |u(y)|\,.$$