Einführung Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen, Übungsblatt 4

WS 2022/23

Prof. Dr. M. Růžička, Dr. A. Kaltenbach **Abgabetermin:** 14. November 2022

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, ein beschränktes Gebiet, α, $\beta \in (0,1)$ und $g \in C^{0,\beta}(\overline{G})$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen gelten:

(a) Falls $f \in C^{0,\alpha}(\overline{G}) \cap L^\infty(G)$ und $g \in L^\infty(G)$ ist, dann gilt $fg \in C^{0,\min\{\alpha,\beta\}}(\overline{G})$.

(b) Falls $f \in C^{0,\alpha}(\overline{G'})$ ist, wobei $G' \supseteq g(G)$ ein beschränktes Gebiet ist, dann gilt $f \circ g \in C^{0,\alpha\beta}(\overline{G})$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Seien X, Y normierte Vektorräume und $A\colon X \to Y$ linear. Zeigen Sie, dass die folgenden Eigenschaften äquivalent sind:

(a) $A\colon X \to Y$ ist beschränkt,

(b) $A\colon X \to Y$ ist stetig in 0,

(c) $A\colon X \to Y$ ist stetig,

(d) $A\colon X \to Y$ ist Lipschitz–stetig.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, ein beschränktes Gebiet und $\alpha \in [0,n)$. Weiterhin sei $A \in L^\infty(G \times G)$. Für $f \in L^2(G)$ definieren wir die Funktion $Tf\colon G \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ für alle $x \in \Omega$ durch

$$(Tf)(x) := \int_G \frac{A(x,y)}{|x-y|^\alpha} f(y)\,\mathrm{d}y\,.$$

Zeigen Sie, dass $T\colon L^2(G) \to L^2(G)$ wohldefiniert, linear und stetig ist. Zeigen Sie insbesondere, dass ein $C > 0$ existiert, sodass

$$\|Tf\|_{L^2(G)} \le C\,\|f\|_{L^2(G)}$$

für alle $f \in L^2(G)$.

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Für $u \in C^0(\mathbb{R}^n)$, $n \in \mathbb{N}$, $h > 0$ und $i \in \{1,\dots,n\}$, definiere $\Delta_i^h u \in C^0(\mathbb{R}^n)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ durch

$$\Delta_i^h u(x) := \frac{u(x+he_i) - u(x)}{h}\,,$$

wobei e_i den i-ten Einheitsvektor im $\mathbb{R}^n$ bezeichnet. Ferner definiere für $u \in C^0(\mathbb{R}^n)$, $n \in \mathbb{N}$, und $h > 0$, $\Delta_h u \in C^0(\mathbb{R}^n)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ durch

$$\Delta_h u(x) := \sum_{i=1}^n \Delta_i^{-h} \Delta_i^h u(x)\,.$$

Zeigen Sie, dass $\Delta_h u \in C^0(\mathbb{R}^n)$ konsistent von der Ordnung 2 ist, d.h. zeigen Sie, dass für $u \in C^4(\mathbb{R}^n)$ mit $\|\partial^\alpha u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} < \infty$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}^n$ mit $|\alpha| \leq 4$ gilt

$$\|\Delta_h u - \Delta u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq c(u)h^2\,,$$

wobei die Konstante $c(u) > 0$ unabhängig von $h > 0$ ist.

Tipp: Begründen Sie, warum gilt

$$u(x + he_i) = \sum_{k=0}^{3} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k}{\partial x_i^k} u(x)h^k + \frac{1}{24} \frac{\partial^4}{\partial x_i^4} u(x+\xi)\xi_i^4$$

mit gewissem $\xi \in \mathbb{R}^n$, $|\xi| \leq |h|$. Diese Entwicklung können Sie weiter nutzen.