Einführung Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen, Übungsblatt 5

WS 2022/23

Prof. Dr. M. Růžička, Dr. A. Kaltenbach **Abgabetermin:** 21. November 2022

Aufgabe 1 ($C^1(0,1)$ ist kein Banachraum) (5 Punkte)

Zeigen Sie durch ein Gegenbeispiel, dass der Raum $C^1(0,1)$, ausgestattet mit der Norm

$$\|u\|_{1,2} = \left(\int_0^1 |u(x)|^2 + |u'(x)|^2 \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}},$$

kein Banachraum ist.

Aufgabe 2 (Klassisch differenzierbar $\Rightarrow$ schwach differenzierbar) (2 Punkte)

Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, ein Normalgebiet und $f \in C^1(G) \cap C(\overline{G})$ mit $\nabla f \in L^1(G)$. Zeigen Sie, dass f in G schwach differenzierbar ist und die klassische und schwache Ableitung in G übereinstimmen.

Aufgabe 3 (Eine nicht schwach differenzierbare Funktion) (3 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Funktion $\chi_{(0,1)}$ in $(-1,1)$ nicht schwach differenzierbar ist.

Aufgabe 4 (Mittelwertseigenschaft und Maximumsprinzip subharmonischer Funktionen) (5 Punkte)

Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, ein beschränktes Gebiet. Sei u eine *subharmonische Funktion* auf G, d.h. $u \in C^2(G)$ und $-\Delta u \leq 0$ in G. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen gelten:

(a) Für jeden Ball $B \subset\subset G$ gilt

$$u(x) \leq \frac{1}{|\partial B|} \int_{\partial B} u(\xi) \,\mathrm{d}o(\xi)\,.$$

Tipp: Sei $B := B_r^n(x) \subset\subset G$. Zeigen Sie, dass die Funktion $\varphi\colon [0, \operatorname{dist}(x, \partial G)) \to \mathbb{R}$, für alle $r \in [0, \operatorname{dist}(x, \partial G))$ definiert durch

$$\varphi(r) := \frac{1}{|\partial B_r^n(x)|} \int_{\partial B_r^n(x)} u(\xi) \,\mathrm{d}o(\xi)\,,$$

monoton wachsend ist. Folgern Sie daraus das Ergebnis.

(b) Es gilt

$$\max_{x \in \overline{G}} u(x) = \max_{x \in \partial G} u(x).$$

Aufgabe 5 (5 Punkte)

Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, ein beschränktes Gebiet, $f \in C(\overline{G})$ und $u \in C^0(\overline{G}) \cap C^2(G)$. Weiterhin sei $-\Delta u = f$ in G. Zeigen Sie, dass

$$\sup_G |u| \leq \sup_{\partial G} |u| + c \sup_G |f|\,,$$

wobei $c > 0$ eine Konstante ist, die nur von $\operatorname{diam} G$ abhängt.

Tipp: Zeigen Sie, dass die Funktion $v \in C^0(\overline{G}) \cap C^2(G)$, für alle $x \in G$ definiert durch $v(x) := u(x) + c_0\, x_1^2$, mit einer geeigneten Konstante $c_0 \geq 0$ subharmonisch ist.