Einführung Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen
Übungsblatt 6 WS 2022/23
Prof. Dr. M. Růžička, Dr. A. Kaltenbach **Abgabetermin:** 28. November 2022

Aufgabe 1 ($H^{1,n}(B^n_{e^{-1}}(0)) \not\hookrightarrow C^0(B^n_{e^{-1}}(0))$) (5 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Definiere die Funktion $f \colon B^n_{e^{-1}}(0) \to \mathbb{R}$ für alle $x \in B^n_{e^{-1}}(0)$ durch

$$f(x) := \begin{cases} \log|\log|x|| & \text{falls } x \in B^n_{e^{-1}}(0) \setminus \{0\} \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases}.$$

Zeigen Sie, dass $f \in H^{1,n}(B^n_{e^{-1}}(0)) \setminus C^0(B^n_{e^{-1}}(0))$ gilt.

Aufgabe 2 ($\nabla u = \mathbf{0} \Rightarrow u = \text{const}$) (5 Punkte)

Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{R}$, ein Gebiet und $u \in H^{1,1}(G)$ so, dass $\nabla u = \mathbf{0}$ fast überall in G. Zeigen Sie, dass ein $c \in \mathbb{R}$ existiert, sodass $u = c$ fast überall in G ist.

Tipp: Sei $B \subset\subset G$ ein Ball. Für $\varepsilon \in (0, \operatorname{dist}(B, \partial G))$, bezeichne $u_\varepsilon \in C^1(G)$ die Regularisierung (Glättung) von $u \in H^{1,1}(G)$. Zeigen Sie, dass ein $c_\varepsilon \in \mathbb{R}$ existiert, sodass $u_\varepsilon = c_\varepsilon$ in B. Folgern Sie daraus das Ergebnis.

Aufgabe 3 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung) (4 Punkte)

Sei $u \in H^{1,1}(0,1)$ und sei $u' \in L^1(0,1)$ die schwache Ableitung. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen gelten:

(a) Es existiert eine Konstante $c \in \mathbb{R}$, sodass

$$u(x) = c + \int_0^x u'(y)\,\mathrm{d}y$$

für fast alle $x \in (0,1)$ gilt.

Tipp: Verwenden Sie Aufgabe 2.

(b) Wenn zusätzlich $u \in \mathring{H}^{1,1}(0,1)$ ist, gilt $c = 0$ in (a).

Aufgabe 4 (Produktregel für Sobolevfunktionen) (6 Punkte)

Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, ein beschränktes Gebiet, $p \in [1, \infty)$ und $f, g \in H^{1,p}(G) \cap L^\infty(G)$. Zeigen Sie, dass $fg \in H^{1,p}(G)$ ist und

$$\nabla(fg) = (\nabla f)g + f(\nabla g) \quad \text{f.ü. in } G$$

gilt.

Tipp: Approximieren Sie $f, g \in H^{1,p}(G) \cap L^\infty(G)$ durch ihre Regularisierungen.