Einführung Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen
Übungsblatt 7

WS 2022/23

Prof. Dr. M. Růžička, Dr. A. Kaltenbach — **Abgabetermin:** 05. Dezember 2022

Aufgabe 1 (Kettenregel für Sobolevfunktionen) (5 Punkte)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, ein beschränktes Gebiet, $1 \le p < \infty$ und $u \in H^{1,p}(\Omega)$. Weiterhin sei $F \in C^1(\mathbb{R})$ mit $F' \in L^\infty(\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass $F \circ u \in H^{1,p}(\Omega)$ ist und

$$\nabla(F \circ u) = (F' \circ u)\, \nabla u \quad \text{ in } L^p(\Omega; \mathbb{R}^n)\,.$$

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, ein beschränktes Gebiet, $1 \le p < \infty$ und $u \in H^{1,p}(\Omega)$. Zeigen Sie, dass auch $u^+ = \max\{0, u\}$, $u^- = \min\{0, u\}$, $|u| \in H^{1,p}(\Omega)$ gilt, und bestimmen Sie die schwachen Ableitungen dieser Funktionen.

Tipp: Um das Ergebnis für u^+ zu zeigen, betrachten Sie die Funktionen $f_\varepsilon \colon \Omega \to \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, für alle $x \in \Omega$ definiert durch

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} \sqrt{u^2(x) + \varepsilon^2} - \varepsilon & \text{falls } u(x) > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}\,.$$

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, ein beschränktes Gebiet, $1 < p < \infty$, $p' = \frac{p}{p-1}$ und $f \in L^{p'}(\Omega)$. Sei X ein Unterraum von $\mathring{H}^{1,p}(\Omega)$ mit $\dim X < \infty$. Wir definieren $I \colon X \to \mathbb{R}$ für alle $v \in X$ durch

$$I(v) = \frac{1}{p} \int_\Omega |\nabla v|^p \,\mathrm{d}x - \int_\Omega f v \,\mathrm{d}x\,.$$

Zeigen Sie, dass ein $u \in X$ existiert, sodass

$$I(u) = \inf_{v \in X} I(v)\,.$$

Tipp: Zeigen Sie zunächst, dass jede Minimalfolge in $(X, \|\cdot\|_{H^{1,p}(\Omega)})$ beschränkt ist.

Aufgabe 4 (Steifigkeitsmatrix auf dem Einheitssimplex) (4 Punkte)

Sei $T \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, das Einheitssimplex mit den Eckpunkten $e_0 = 0, e_1, \ldots, e_n \in \mathbb{R}^n$, wobei $(e_i)_{i=1,\ldots,n}$ die kanonische Basis von $\mathbb{R}^n$ bezeichnet. Seien $\varphi_0, \ldots, \varphi_n \colon T \to \mathbb{R}$ Polynome ersten Grades mit $\varphi_i(e_j) = \delta_{ij}$ für alle $i, j \in \{0, \ldots, n\}$. Berechnen Sie die Steifigkeitsmatrix

$$S = \left(\int_T \nabla\varphi_i \cdot \nabla\varphi_j \,\mathrm{d}x \right)_{i,j=0,\ldots,n}\,.$$